

Rainer Neumann
4^o Diss. Frankfurt 9/11
1904



Zur Theorie der optischen Bistabilität

mit Rauschen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik

der

Johann Wolfgang Goethe-Universität

in Frankfurt/Main

von

Rainer Neumann

aus Frankfurt/Main

Frankfurt/Main

Oktober 1983

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main

Dekan: Prof. Dr. F. Granzer
1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Haug
2. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Martienssen
Tag der Promotion: 17.1.1984

INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	1
2. Physikalische Grundlagen der optischen Bistabilität	7
3. Theoretische Modelle	19
3.1 Klassische Beschreibung	20
3.1.1 Makroskopische Maxwell-Gleichungen	20
3.1.2 "Mean-Field"-Näherung	23
3.1.3 Berücksichtigung der Resonatorgeometrie	25
3.2 Semiklassische Beschreibung	28
3.2.1 Die Maxwell-Bloch-Gleichungen	28
3.2.2 Die Maxwell-Debye-Gleichungen	33
3.3 Statistische Beschreibung	36
3.3.1 Langevin-Gleichung	37
3.3.2 Fokker-Planck-Gleichung	39
4. Optische Bistabilität bei Zwei-Photonen-Übergängen	
-stationäre Lösungen der stochastischen Gleichungen-	43
4.1 Die Erzeugung von Exzitonenmolekülen	
durch Zwei-Photonen-Absorption	44
4.2 Entwicklung der Langevin-Gleichung	
für das elektrische Feld	46
4.3 Lösung der stationären Fokker-Planck-Gleichung	
mit Hilfe des Matrix-Kettenbruch-Verfahrens	49
4.4 Ergebnisse	56
4.5 Untersuchungen zur Photonenstatistik	61

<i>5. Optische Bistabilität bei Ein-Photonen-Übergängen</i>	
<i>-zeitabhängige Lösungen der deterministischen und der</i>	
<i>stochastischen Gleichungen-</i>	67
5.1 Nichtlineare Dynamik dissipativer Systeme	68
5.1.1 Deterministisches Chaos	68
5.1.2 Das Feigenbaumszenarium	
am Beispiel der Logistischen Gleichung	76
5.2 Periodisches und chaotisches Verhalten	
bei der optischen Bistabilität	82
5.2.1 Stabilitätsanalyse der Maxwell-Bloch-Gleichungen	84
5.2.2 Ergebnisse	88
5.2.3 Nachweis des Feigenbaumszenariums	
mit Hilfe einer eindimensionalen Abbildung	103
5.3 Deterministisches Chaos und Fluktuationen	108
<i>Anhang</i>	123
A Rekursionsformeln der	
verallgemeinerten Laguerre-Polynome	123
B Matricelemente der Matrizen P,Q und R	
des Matrix-Kettenbruch-Verfahrens	125
<i>Referenzen</i>	127

Zu den bedeutendsten wissenschaftlichen wie auch technologischen Errungenschaften der letzten Jahrzehnte gehört bekanntermaßen die Entwicklung des Lasers. Die mit dieser kohärenten Lichtquelle erreichbaren hohen Feldstärken schufen unter anderem die Möglichkeit, erstmals optisch nichtlineare Erscheinungen experimentell zu untersuchen.

Unter optisch nichtlinearen Erscheinungen versteht man im allgemeinen die nichtlineare Reaktion eines Mediums auf ein äußeres elektromagnetisches Feld. Diese erfolgt durch die Ausbildung einer, hinsichtlich der elektrischen Feldstärke, nichtlinearen Polarisierung.

Bald nach der Entwicklung des Lasers gelang der erste experimentelle Nachweis eines solchen, optisch nichtlinearen Effektes. Mit Hilfe eines gepulsten Rubinlasers, dessen monochromatisches Lichtfeld einen Quarzkristall passierte, wurde ein Lichtfeld mit der doppelten Frequenz, die Harmonische, erzeugt [1]. Viele weitere Effekte folgten. Damit wurde eine sprunghafte Entwicklung des Gebietes der nichtlinearen Optik von theoretischer wie von experimenteller Seite eingeleitet, die bis heute noch andauert. Der experimentelle Nachweis neuartiger nichtlinearer Phänomene führte einerseits zu veränderten theoretischen Konzepten. Oftmals waren es aber auch theoretische Modelle, die diese Phänomene postulierten und später von den Experimentatoren nachgewiesen werden konnten. Zu diesem letzteren Fall gehört die optische Bistabilität [2], mit der sich die vorliegende Arbeit beschäftigt.

Der Begriff optische Bistabilität beinhaltet eine Reihe von statischen und dynamischen Phänomenen, die durch die Wechselwirkung von Licht und

einem, mit einem optisch nichtlinearen Medium gefüllten Resonator entstehen können.

Läßt man das kohärente Lichtfeld eines Lasers in einen Resonator einfallen, so wird ein Teil des Feldes reflektiert, ein Teil transmittiert und ein Teil gestreut. Ist der Resonator leer, d.h. nicht mit einem Medium gefüllt, ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen der transmittierten und der einfallenden Lichtintensität. Diese Situation ändert sich jedoch grundlegend, wenn in den Resonator ein optisch nichtlineares Medium eingebracht wird. Die transmittierte Lichtintensität wird dann zu einer nichtlinearen Funktion der Eingangsintensität. Unter bestimmten Bedingungen variiert die transmittierte Intensität diskontinuierlich von einem Zustand niedriger zu einem Zustand hoher Transmission und umgekehrt und zeigt dabei einen Hystereseeffekt. Es entsteht ein Bereich, in dem zu *einem* Wert der einfallenden Lichtintensität *zwei* stabile Werte der transmittierten Lichtintensität auftreten. Diesen Effekt bezeichnet man als optische Bistabilität. Die Hysterese sowie die Koexistenz zweier stabiler Zustände machen deutlich, daß es sich hierbei um einen Nichtgleichgewichtsphasenübergang erster Ordnung handelt.

Die optische Bistabilität hat in den letzten Jahren ein bemerkenswertes Interesse gefunden, das sich in einer Vielzahl von theoretischen und experimentellen Arbeiten niedergeschlagen hat.

Zum einen eröffnen sich technologische Anwendungsmöglichkeiten in der integrierten Optik, beispielsweise als Schaltelement oder Transistor. Insbesondere die Verwendung von kleinen Halbleiterplättchen mit extrem kurzen Schaltzeiten könnte in naher Zukunft zu einer Entwicklung führen, die einem Vergleich mit elektronischen Bauelementen standhält.

Von theoretischer Seite bietet sich die Möglichkeit, die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie an einem Beispiel zu studieren, das im Gegensatz zum Laser ein passives Medium enthält, also nicht zusätzlich von außen gepumpt wird. Systeme, die ebenfalls bistabiles Verhalten zeigen, bei denen das nichtlineare Medium zunächst mit Hilfe eines Verstärkers angeregt wird, wie bei der Erzeugung der Harmonischen oder der Subharmonischen, sowie die optische Bistabilität in Lasern, werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Den Ausgangspunkt für eine theoretische Beschreibung bilden die Maxwell-Gleichungen. Aufgrund der erforderlichen hohen Feldstärken und der damit verbundenen großen Zahl von Photonen werden Quantenfluktuationen üblicherweise vernachlässigt und das elektromagnetische Feld als klassische Größe behandelt. Die Berücksichtigung der auftretenden Nichtlinearitäten kann einerseits durch das explizite Einsetzen der dielektrischen Funktion in die Maxwell-Gleichungen erfolgen (Kapitel 4). Die dielektrische Funktion, die die Polarisierung mit dem elektrischen Feld verknüpft, ist insbesondere für Halbleitermaterialien durch die Methoden der Vielteilchentheorie erfolgreich berechnet worden und damit gut bekannt [3].

Andererseits hat sich aber vor allem ein Modell in der Theorie durchgesetzt, das die intrinsischen Eigenschaften des nichtlinearen Mediums in allgemeiner Form berücksichtigt und mit Hilfe der Maxwell-Bloch-Gleichungen beschrieben wird. Das nichtlineare Medium besteht hierbei aus einem quantenmechanischen System von Zwei-Niveau-Atomen, das mit dem klassischen elektrischen Feld wechselwirkt. Mit dieser semiklassischen Betrachtungsweise erhält man neben der Wellengleichung für das elektrische Feld noch zusätzlich Gleichungen für die Polarisierung und die Inversion, die sogenannten Material- oder auch optischen Blochgleichungen.



Neben der nichtlinearen Wechselwirkung zwischen Licht und Materie basiert das Prinzip der optischen Bistabilität, wie bereits erwähnt, auf dem Rückkopplungsmechanismus durch den Resonator. Daher muß die theoretische Beschreibung auch die, durch die Resonatorgeometrie gegebenen Randbedingungen berücksichtigen. Verwendung finden hier vor allem der Fabry-Perot- und der Ring-Resonator (Kapitel 2).

Die Untersuchung der optischen Bistabilität führt unter bestimmten Bedingungen zur Ausbildung kooperativer Effekte wie sie in dem von Haken entwickelten interdisziplinären Wissenschaftsgebiet Synergetik [4] und in Prigogines Theorie dissipativer Strukturen [5] behandelt werden.

Neben dem bereits angesprochenen Nichtgleichgewichtsphasenübergang treten weitere Instabilitäten im Bereich hoher Transmission auf, die allerdings nur unter Einbeziehung der Polarisierung und der Inversion auf der Basis der Maxwell-Bloch-Gleichungen beschrieben werden können. Es entwickeln sich zeitlich periodische, oszillatorische Lösungen, die nicht durch externen Einfluß, sondern durch die Selbstorganisation des Systems, spontan erzeugt werden.

Die Untersuchung der Dynamik liefert aber auch irreguläres, aperiodisches Verhalten. Damit eröffnet sich ein Zusammenhang zu dem in den letzten Jahren unter dem Schlagwort Chaos bekannt gewordenen, sich rasch entwickelnden Gebiet der Theorie der nichtlinearen Dynamik dissipativer Systeme, die sich auf viele wissenschaftliche Bereiche wie Biologie, Physik, Chemie etc. erstreckt. Da sich die chaotischen Strukturen durch die Lösung deterministischer Gleichungen ergeben spricht man auch von deterministischem Chaos.

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß der Übergang von periodischen zu chaotischen Lösungen für eine ganze Klasse unterschiedlicher Systeme

vollkommen äquivalent verläuft und durch sogenannte Szenarien beschrieben wird. Bis heute sind drei solcher Szenarien oder auch Universalitätsklassen bekannt, die den möglichen Weg eines Systems zum Chaos angeben.

Bei allen bisher geschilderten Phänomenen, die im Zusammenhang mit der optischen Bistabilität auftreten, beschränkt sich die theoretische Beschreibung zwangsläufig auf einige wenige Freiheitsgrade. Wie in vielen anderen physikalischen Systemen handelt es sich jedoch um ein Problem vieler Freiheitsgrade, die sich aus der makroskopischen Zahl der Atome im nichtlinearen Medium, sowie der unendlichen Zahl der Moden des elektrischen Feldes im Resonator rekrutieren. Die Kopplung dieser vielen anderen Freiheitsgrade an das System wird mit Hilfe von Fluktuationskräften beschrieben. Aus den deterministischen werden dadurch stochastische Gleichungen, die Langevin-Gleichungen.

Mit dieser Formulierung werden thermische Fluktuationen, Intensitätsfluktuationen des einfallenden Lichtfeldes u.a. berücksichtigt.

Fluktuationen spielen hauptsächlich in den Bereichen, in denen das System instabil wird, eine bedeutende Rolle. So ist bekannt, daß mittlere Feldtheorien beispielsweise zur Beschreibung von Phasenübergängen nicht ausreichen, da gerade die Fluktuationen den Übergang eines Systems vom metastabilen in den stabilen Zustand hervorrufen.

In dieser Arbeit wird daher der Versuch unternommen, den Einfluß von Fluktuationen auf die statischen sowie dynamischen Phänomene bei der optischen Bistabilität zu untersuchen. Dazu wird sowohl die klassische als auch die semiklassische Beschreibungsmethode (Kapitel 3) benutzt.

Zum einen wird unter Verwendung der dielektrischen Funktion einer Zwei-Photonen-Absorption, wie sie in Halbleitermaterialien mit großer Bandlücke auftritt (Kapitel 4), die Langevin-Gleichung für das elektrische Feld entwickelt. Die stationären Lösungen der dazu äquivalenten Fokker-Planck-Gleichung werden numerisch berechnet und führen zu einem Übergang von dem Zustand niedriger zu dem Zustand hoher Transmission, der der Maxwellkonstruktion bei Gleichgewichtsphasenübergängen erster Ordnung ähnelt und sich von der Lösung der entsprechenden deterministischen Gleichung grundlegend unterscheidet. Darüberhinaus kann die stationäre Verteilungsfunktion für das elektrische Feld über den gesamten bistabilen Bereich hinweg angegeben werden.

Die detaillierte Untersuchung der Zeitabhängigkeit des Systems der Maxwell-Bloch-Gleichungen (Kapitel 5) liefert im Bereich hoher Transmission oszillierende Lösungen, die über eine Kaskade von Periodenverdopplungen zu chaotischem Verhalten führt. Der Weg zu diesem selbsterzeugten Rauschen eines deterministischen Systems kann eindeutig mit Hilfe einer eindimensionalen Abbildung als Feigenbaumszenarium identifiziert werden.

Auf der Basis des Systems der Maxwell-Bloch-Gleichungen wird mit Hilfe einer numerischen Simulationsmethode erstmals das Zusammenspiel der Instabilitäten im Bereich hoher Transmission und den vorgegebenen Fluktuationen behandelt. Dabei zeigt sich, daß die Ausbildung periodischer Lösungen sehr empfindlich auf äußere Störungen reagiert. Schon bei kleinen Rauschstärken verschwinden die Oszillationen mit höherer Periode und es erfolgt ein Übergang in einen stabilen Zustand.

2. PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN DER OPTISCHEN BISTABILITÄT

Die Existenz zweier unterschiedlicher Transmissionszustände bei ein und derselben Eingangsintensität eines Lichtfeldes, das einen mit Materie gefüllten Resonator passiert, stellt ein neuartiges Phänomen im Gebiet der nichtlinearen Optik dar. Die physikalischen Bedingungen für das Auftreten dieses Effektes beinhalten das Vorliegen eines optisch nichtlinearen Mediums, mit dem ein kohärentes Lichtfeld wechselwirkt, sowie einer Resonatoranordnung, die für den notwendigen Rückkopplungsmechanismus sorgt. Beide Aspekte sollen im folgenden diskutiert werden.

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Medium wird einerseits durch die makroskopischen Maxwell-Gleichungen, andererseits mit Hilfe der Materialgleichungen beschrieben. Da es sich bei der optischen Bistabilität um die Untersuchung optischer Erscheinungen in Nichtleitern handelt, können der Stromterm, sowie die Raumladungen unberücksichtigt bleiben. Die Maxwell-Gleichungen lauten somit

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1).$$

Die Charakterisierung der Eigenschaften des Mediums, in dem sich das elektromagnetische Feld ausbreitet, erfolgt über die Materialgleichungen, die die Kopplung zwischen der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$ bzw. zwischen der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ und der magnetischen Induktion $\vec{B}$ angeben. Aufgrund der vorliegenden op-

tischen Frequenzen spielen magnetische Effekte keine Rolle, so daß die magnetische Permeabilität $\mu=1$ und $\vec{B} = \mu\vec{H} = \vec{H}$ (2.2) gesetzt werden kann.

Die einzig verbleibende Materialgleichung, die die gesamte Information über die Wechselwirkung des Lichtfeldes mit dem Medium enthält, definiert über $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ die makroskopische Polarisation $\vec{P}$, die in der linearen Optik direkt proportional zur elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ ist. Es gilt $\vec{P} = \underline{\underline{\chi}}\vec{E}$ und über die Suszeptibilität $\underline{\underline{\chi}}$, die im allgemeinen einen Tensor zweiter Stufe darstellt, ergibt sich die bekannte Relation $\vec{D} = \underline{\underline{\epsilon}}\vec{E}$ (2.3), mit dem Dielektrizitätstensor $\underline{\underline{\epsilon}}$.

Durch die Annahme isotroper Medien, die im folgenden beibehalten wird, reduzieren sich $\underline{\underline{\chi}}$ und $\underline{\underline{\epsilon}}$ auf skalare Größen. Aus den Maxwell-Gleichungen (2.1) erhält man mit (2.2) und (2.3) eine Wellengleichung für das elektrische Feld, deren Lösungen monochromatische ebene Wellen der Form $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$ (2.4) mit der Dispersionsrelation $k^2 = \omega^2 \epsilon / c^2$ (2.5) darstellen.

Durch das Einwirken starker Lichtfelder auf das Material, wie im Falle der optischen Bistabilität, verliert der lineare Zusammenhang zwischen $\vec{P}$ und $\vec{E}$ seine Gültigkeit. Die Suszeptibilität sowie die Dielektrizitätskonstante werden selbst zu einer Funktion der elektrischen Feldstärke. Man spricht von einer intensitätsabhängigen Suszeptibilität bzw. von einer intensitätsabhängigen dielektrischen Funktion. Da die dielektrische Funktion im allgemeinen eine komplexe Größe ist, führt man den komplexen Brechungsindex $N^2 = \epsilon = \epsilon_1 + i\epsilon_2$ mit $N = n + i\kappa$ (2.6) ein [6]. Daraus folgt $\epsilon_1 = n^2 - \kappa^2$, $\epsilon_2 = 2n\kappa$. n wird als reeller Brechungsindex, κ als Extinktionskoeffizient bezeichnet. Zusammen mit (2.5) und (2.4) ergibt sich für eine in z-Richtung laufende ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\omega \kappa}{c} z} e^{i\left(\frac{\omega n}{c} z - \omega t\right)}$$

Man erkennt sofort, daß die Welle gedämpft ist. Der Imaginärteil der dielektrischen Funktion bestimmt über den Extinktionskoeffizienten wesentlich die Absorption, der Realteil über den reellen Brechungsindex die Dispersion.

Damit wird deutlich, daß die komplexe dielektrische Funktion die mikroskopischen Prozesse bei der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie mit den makroskopischen Größen der Dispersion und Absorption verbindet. Das Vorliegen einer intensitätsabhängigen dielektrischen Funktion führt zu einer Veränderung der dispersiven bzw. absorptiven Eigenschaften des Mediums. Diese nichtlineare Antwort des Systems dokumentiert die physikalischen Ursachen für das Auftreten der optischen Bistabilität.

Je nachdem, ob der intensitätsabhängige Brechungsindex die entscheidende Rolle spielt oder der Absorptionskoeffizient die dominante Nichtlinearität liefert, unterscheidet man zwischen der dispersiven und der absorptiven optischen Bistabilität. Die jeweils zugrunde liegenden Mechanismen sind verschieden und sollen anhand einfacher Überlegungen verdeutlicht werden.

Dazu benötigt man, wie bereits erwähnt, eine Resonatoranordnung. Von experimenteller Seite findet vor allem der Fabry-Perot-Resonator (Abb.1) Verwendung.

Er besteht aus zwei planparallelen Spiegeln zwischen denen sich das optisch nichtlineare Medium befindet. Der Abstand der Spiegel definiert die Resonatorlänge L .

Bei der theoretischen Beschreibung ist es oftmals zweckmäßig, den Fabry-Perot-Resonator zu einem Ringresonator auszubauen (Abb.2), der zusätzlich zwei hundertprozentig reflektierende Spiegel (3 und 4) enthält.

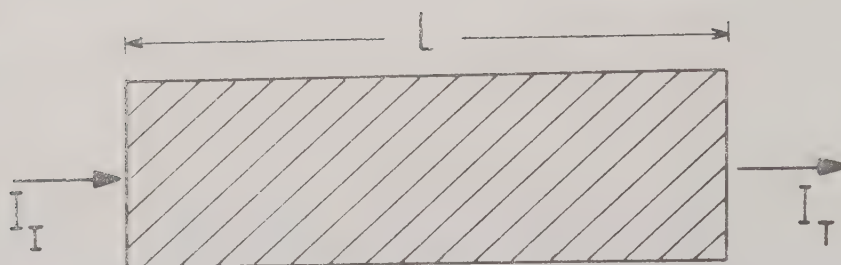


Abbildung 1. : Schematische Darstellung des Fabry-Perot-Resonators.

Diese Anordnung hat den Vorteil, daß das Problem der stehenden Wellen, das beim Fabry-Perot-Resonator auftritt, vermieden wird, und die Ausbreitung des elektromagnetischen Feldes durch laufende Wellen behandelt werden kann. Dieser Aspekt wird im Rahmen der theoretischen Modellbeschreibung (Kapitel 3) diskutiert.

Für die folgenden Überlegungen wird der Fabry-Perot-Resonator aus Abb.1 gewählt.

Läßt man monochromatisches Licht unter normaler Inzidenz in den Resonator einfallen, kommt es zu einer Überlagerung von vorwärts und rückwärts laufenden Wellen. Die Summe aus dem direkt transmittierten Anteil des Lichtfeldes und den Anteilen, die den Resonator nach $2n$ internen Reflexionen wieder verlassen, bestimmt die Amplitude des transmittierten Lichtfeldes [7]

$$E_t = E_i t^2 e^{i\delta} \sum_{n=0}^{\infty} (r e^{i\delta})^{2n} = \frac{E_i t^2 e^{i\delta}}{1 - r^2 e^{2i\delta}}$$

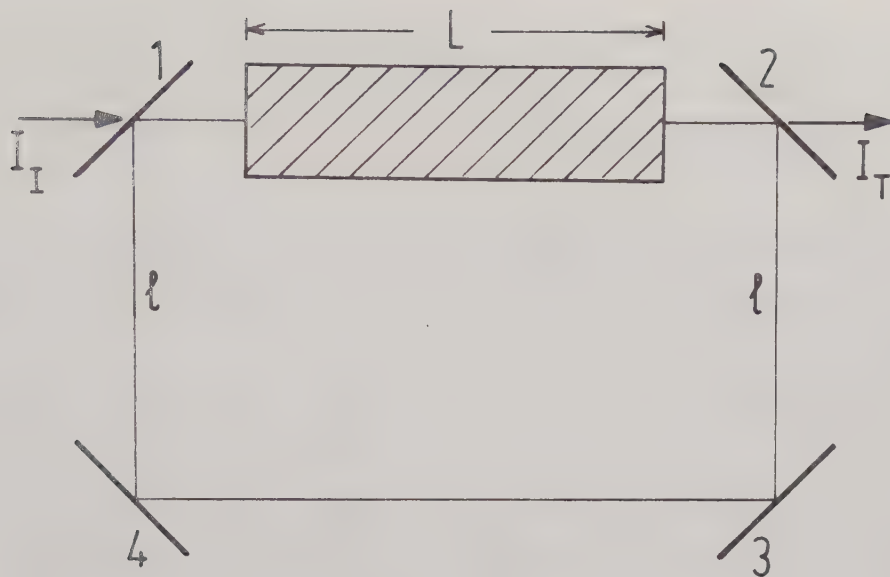


Abbildung 2. : Schematische Darstellung des Ring-Resonators.

Diese einfache geometrische Überlegung für ebene Wellen führt bei gegebener Amplitude des einfallenden Lichtfeldes nach jedem Durchlaufen des Resonators der Länge L zu einer komplexen Phasenverschiebung

$$\delta = \delta' + i \delta'' = L \sqrt{\epsilon} \frac{\omega}{c} \quad (2.7).$$

Bei verlustfreien Spiegeln gibt $t^2 = T$ den Transmissionskoeffizienten und $r^2 = R = 1-T$ den Reflektionskoeffizienten an und man erhält für die transmittierte Intensität $I_T = |E_t|^2$ die bekannte Fabry-Perot-Resonatorformel [7]

$$\tau \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{(1-R)^2}{[(e^{\delta''} - R e^{-\delta''})^2 + 4R \sin^2 \delta']} \quad (2.8).$$

Das Verhältnis von transmittierter zu einfallender Lichtintensität bezeichnet man als die Transmission τ .

Befindet sich zwischen den Spiegeln des Resonators ein optisch nichtlineares Medium, wird die Phasenverschiebung (2.7) über die dielektrische Funktion (2.6) intensitätsabhängig.

Im dispersiven Grenzfall der optischen Bistabilität kann die Absorption vernachlässigt werden ($\delta'' = 0$) und Formel (2.8) reduziert sich auf die Airy-Funktion

$$\tau \equiv \frac{I_{\tau}}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \delta'} \quad \text{mit} \quad F = \frac{4R}{(1-R)^2} \quad (2.9).$$

Die Finesse F gibt das Verhältnis zwischen der Entfernung zweier benachbarter Transmissionsmaxima und der Halbwertsbreite der Verteilung um diese Maxima an. Diese sind bei hohem Reflektionsvermögen der Spiegel am deutlichsten ausgeprägt und verschmieren mit wachsendem Transmissionskoeffizienten. Das Maximum der Transmission ($\tau = 1$) tritt immer dann auf, wenn der Realteil der Phasenverschiebung δ' den Wert eines ganzzahligen Vielfachen von π annimmt. Mit $\delta' = \omega L n / c = N\pi$ ist der Resonator auf die Frequenz des einfallenden Lichtfeldes abgestimmt und es kommt zu einer konstruktiven Interferenz der sich überlagernden Lichtwellen.

Eine Variation der Phasenverschiebung kann durch den intensitätsabhängigen Brechungsindex erreicht werden, der die optische Weglänge verändert. Als Beispiel wird der einfachste funktionale Zusammenhang zwischen dem Brechungsindex und der im Resonator vorliegenden, internen

Lichtintensität I_{intern} gewählt [8]: $n = n(I_{\text{intern}}) = n_1 + n_2 I_{\text{intern}}$ mit den Konstanten n_1 und n_2 .

Mit diesem Ansatz, der der Beschreibung des Kerr-Effektes entspricht, ergibt sich für den Realteil der Phasenverschiebung

$$\delta' = \frac{\omega}{c} L n_1 + \frac{\omega}{c} L n_2 I_{\text{intern}} \quad (2.10)$$

mit $\omega L n_1 / c = \pi N - \theta$, wobei θ für eine Verstimmung des Resonators sorgt.

Mit Hilfe einer zweiten Relation

$$\tau = \frac{I_{\text{intern}}}{I_i} \frac{(1 - R)}{(1 + R)} \quad (2.11),$$

die man aus der Summation der im Resonator vorwärts und rückwärts laufenden Wellen für den dispersiven Grenzfall gewinnt, kann die interne Lichtintensität über (2.9) eliminiert werden und man erhält eine Beziehung zwischen der transmittierten und der einfallenden Lichtintensität. Dies ist in Abb.3 mit den Parametern $\theta = \pi/2$ und $F = \frac{1}{2}$ zunächst graphisch durchgeführt [9].

Aufgetragen sind die Airy-Funktion (2.9) sowie die Gerade (2.11) als Funktion des Realteils der Phasenverschiebung. Die Schnittpunkte repräsentieren die Werte des internen Lichtfeldes, für die die beiden Gleichungen bei gegebener Eingangsintensität selbstkonsistent erfüllt werden. Mit der Zunahme der Eingangsintensität ist eine Abnahme der Steigung der Geraden (2.11) verbunden. Der Schnittpunkt nimmt zunächst einen glatten Verlauf entlang der Kurve (2.9), bis er den Punkt A erreicht hat. Ein infinitesimaler Anstieg der Eingangsintensität bewirkt an dieser Stelle einen diskontinuierlichen Sprung der Transmission zu dem Punkt B, während A instabil wird.

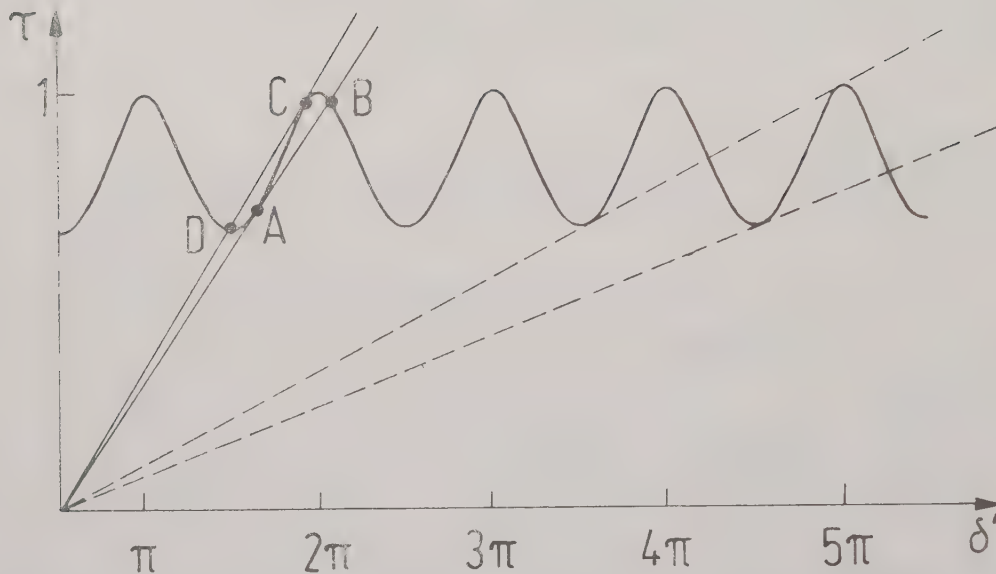


Abbildung 3. : Graphische Darstellung der optischen Bistabilität.

Erniedrigt man die Eingangsintensität wieder, bleibt der Zustand hoher Transmission solange stabil, bis der Punkt C erreicht ist und ein Rücksprung in den unteren Transmissionsast nach D erfolgt. Zwischen den beiden Geraden mit den Schnittpunkten A,B und C,D liegt der bistabile Bereich, in dem zwei stabile Lösungen der transmittierten Intensität bei einer vorgegebenen Eingangsintensität auftreten. Dieser Effekt kann sich in den höheren Ordnungen der Transmissionskurve (2.9) - wie in Abb.3 mit Hilfe der beiden gestrichelten Geraden angedeutet - wiederholen und wird dann als Multistabilität bezeichnet.

Die Eingangs-Ausgangs-Charakteristik der optischen Bistabilität zeigt damit das in Abb.4 angegebene qualitative Verhalten.

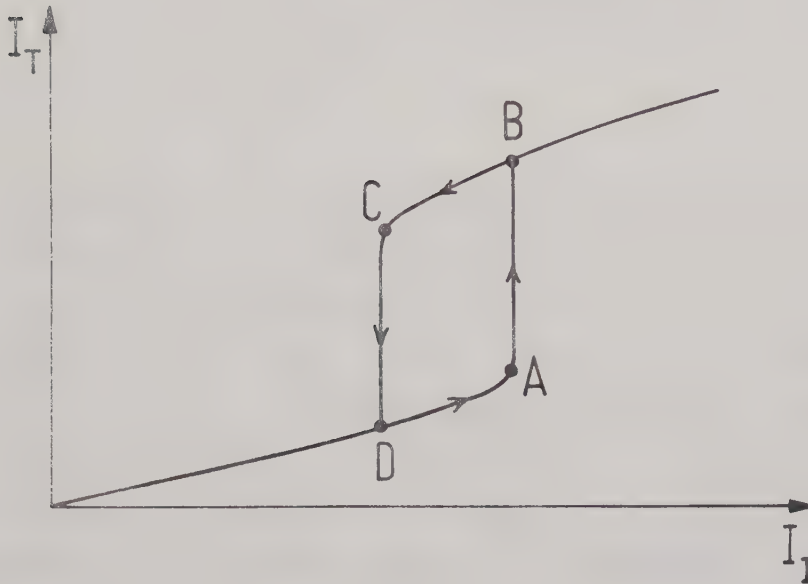


Abbildung 4. : Eingangs-Ausgangs-Charakteristik der optischen Bistabilität.

Bei kleinen Eingangsintensitäten kommt es durch die Resonatorverstimmung θ zu einer destruktiven Interferenz der sich überlagernden Wellen im Resonator. Die transmittierte Lichtintensität ist klein. In diesem Bereich spielt die interne Lichtintensität keine Rolle und es ergibt sich ein linearer Zusammenhang zwischen einfallender und transmittierter Intensität. Mit wachsender Eingangsintensität baut sich im Resonator ein Lichtfeld auf, das den Brechungsindex des Mediums über (2.10) verändert. Die Resonatorverstimmung θ wird zunehmend kompensiert. Die Wechselwirkung zwischen dem ansteigenden internen Lichtfeld und der damit verbundenen

weiteren Brechungsindexänderung führt zu einer konstruktiven Interferenz der sich überlagernden Wellen im Resonator und bewirkt den plötzlichen Sprung der transmittierten Intensität in den oberen Transmissionsast (Übergang von A nach B). Durch diesen Mechanismus entsteht eine resonante Überhöhung des internen Lichtfeldes, die den Zustand hoher Transmission auch bei einer Absenkung der Eingangsintensität zunächst stabil hält und die Ausbildung der in Abb.4 schematisch dargestellten Hysterese verursacht.

Im absorptiven Grenzfall der optischen Bistabilität wird der Resonator im Gegensatz zum dispersiven Fall auf die Frequenz des einfallenden Lichtfeldes abgestimmt. Das Medium besteht aus einem sättigbaren Absorber. Die Fabry-Perot-Resonatorformel (2.8) führt unter Vernachlässigung dispersiver Effekte ($\delta'' \gg \delta'$) zu einer Transmission

$$\tau \equiv \frac{I_r}{I_i} = (1-R)^2 e^{-2\delta''} = (1-R)^2 e^{-\alpha L} \quad (2.12).$$

Die Absorption $\alpha = 2\omega\kappa/c$,

bezogen auf die Kristalllänge L , wird über den Extinktionskoeffizienten κ zu einer abnehmenden Funktion der internen Lichtintensität und liefert die entscheidende Nichtlinearität zum Auftreten der optischen Bistabilität. Das qualitative Verhalten der Eingangs-Ausgangs-Charakteristik entspricht dem des dispersiven Falles in Abb.4.

Im absorptiven Grenzfall ist es allerdings die hohe Absorption des Mediums, die bei kleinen Eingangsintensitäten des Lichtfeldes eine konstruktive Interferenz der sich überlagernden Wellen im Resonator verhindert. Die Transmission ist gering. Mit wachsender Eingangsintensität

erhöht sich das interne Lichtfeld im Resonator, bis eine Sättigungsintensität erreicht ist, bei der das Medium transparent wird und das System in den Zustand hoher Transmission übergeht. Entsprechend dem dispersiven Fall entsteht durch die jetzt konstruktiv interferierenden Wellen im Resonator eine resonante Überhöhung des internen Lichtfeldes, die das Auftreten der Hysterese bei erneuter Abnahme der Eingangsintensität erklärt.

Auf diesen absorptiven Grenzfall bezog sich auch der erste Vorschlag zur optischen Bistabilität von Szöke und Mitarbeitern [10]. Es zeigte sich jedoch in den darauffolgenden experimentellen Arbeiten [11], daß die Sättigung des Absorbers nur schwer zu erreichen ist und große Änderungen der Eingangsintensität erfordert. Die erste experimentelle Realisierung der optischen Bistabilität [12] gelang daher unter Bedingungen, bei denen die dispersiven Effekte, die bis dahin in den theoretischen Arbeiten vernachlässigt wurden [13], die dominante Rolle spielten. In diesem Experiment wurde ein mit Natriumdampf gefüllter Fabry-Perot-Resonator von außen mit einem kontinuierlichen Laserlicht bestrahlt. Durch Variation der Eingangsintensität konnte eine Eingangs-Ausgangs-Charakteristik nachgewiesen werden, die der in Abb.4 skizzierten Form entsprach.

Die rein dispersive sowie die rein absorptive optische Bistabilität stellen Grenzfälle dar, die beide in einer theoretischen Beschreibung enthalten sein sollten. So wie der Realteil der dielektrischen Funktion über die Kramers-Kronig-Relation mit dem Imaginärteil verbunden ist, sind auch die makroskopischen Größen der Dispersion und Absorption miteinander verknüpft. Im allgemeinen wird daher eine theoretische Beschreibung der optischen Bistabilität den gemischt dispersiv-absorptiven Fall zu berücksichtigen haben. Diese wird in den folgenden Kapiteln vorgestellt.

3. THEORETISCHE MODELLE

Im folgenden wird die klassische und die semiklassische Beschreibungsmethode der optischen Bistabilität vorgestellt. Beide Methoden behandeln das elektrische Feld aufgrund der erforderlichen hohen Feldstärken bzw. der vorhandenen großen Zahl von Photonen als klassische Größe. Die Wechselwirkung mit dem homogen und isotrop angenommenen optisch nichtlinearen Medium wird dagegen in unterschiedlicher Weise einbezogen. Durch die Berücksichtigung stochastischer Kräfte im Rahmen der statistischen Beschreibung werden sowohl das klassische als auch das semiklassische Modell erweitert. Diese Formulierung bildet die Ausgangsbasis für die anschließenden Untersuchungen zur optischen Bistabilität (Kapitel 4 und 5).

3.1 KLASSISCHE BESCHREIBUNG

3.1.1 MAKROSKOPISCHE MAXWELL-GLEICHUNGEN

Grundlage der klassischen Beschreibung der optischen Bistabilität sind die makroskopischen Maxwell-Gleichungen, wie sie in Kapitel 2 bereits angegeben wurden (2.1). Unter Vernachlässigung magnetischer Effekte (2.2) ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= 0 & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1).$$

Das in den Resonator einfallende Lichtfeld des Lasers wird kohärent angenommen. Dies bedeutet, daß monochromatisches Licht mit konstanter Intensität vorliegt. Weiterhin wird die radiale gauß'sche Intensitätsverteilung um das Zentrum eines Lichtstrahls vernachlässigt. Damit kann die Beschreibung der Propagation des elektromagnetischen Feldes auf die transversale Ausbreitungsrichtung reduziert werden. (Im folgenden wird immer eine eindimensionale Ortsabhängigkeit, sowie linear polarisiertes Licht angenommen, so daß es genügt, mit skalaren Größen $E(z,t) \equiv E$ und $P(z,t) \equiv P$ zu arbeiten.) Aus den Maxwell-Gleichungen (3.1) und der Verknüpfung zwischen dielektrischer Verschiebung und Polarisation (2.3) resultiert eine Wellengleichung für das sich in z-Richtung ausbreitende elektrische Feld

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (3.2).$$

Die Polarisation wird in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil zerlegt:

$$P = (\chi_1 + \chi_{NL})E = P_1 + P_{NL} \quad (3.3),$$

wobei die lineare Suszeptibilität χ_1 mit der linearen dielektrischen Funktion über $\epsilon_1 = 1 + 4\pi\chi_1$ (3.4) und der nichtlineare Anteil der Suszeptibilität χ_{NL} mit dem nichtlinearen Anteil der dielektrischen Funktion über $\epsilon_{NL} = 4\pi\chi_{NL}$ (3.5) verbunden sind.

Da die Lösung der Wellengleichung (3.2) im linearen Bereich ebene Wellen der Form (2.4) darstellen, wird das elektrische Feld, sowie der nichtlineare Anteil der Polarisation nach ebenen Wellen entwickelt

$$E = E_0 e^{i(kz - \omega_0 t)} + c.c.$$

$$P_{NL} = P_0^{NL} e^{i(kz - \omega_0 t)} + c.c. \quad (3.6).$$

Die Frequenz ω_0 des Lichtfeldes soll in der Nähe einer Eigenfrequenz ω_R des nicht angeregten Resonators liegen. Mit $\omega_0 = \omega_R + \Delta\omega$ und $\Delta\omega \ll \omega_R$ (3.7) entsteht eine Resonatorverstimmung gegenüber der Frequenz des einfallenden Lichtfeldes.

Zwischen der Wellenzahl k und der Frequenz ω_0 gilt die Dispersionsrelation des linearen Mediums

$$k = \frac{\omega_R \sqrt{\epsilon_1}}{c} = \frac{\omega_R}{c} \quad (3.8).$$

Der Ansatz (3.6) wird zusammen mit (3.7) und (3.8) in die Wellengleichung (3.2) eingesetzt und eine langsam veränderliche Amplituden-Approximation

durchgeführt. Diese Näherung beinhaltet die Forderung, daß die Amplituden E_0 und P_0^{NL} der ebenen Wellen im Vergleich zu dem schnell oszillierenden Anteil, der über die Exponentialfunktion beschrieben wird, nur langsam variieren. Bei den verwendeten optischen Frequenzen ($\omega \approx 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ und den bei der optischen Bistabilität üblicherweise benutzten kurzen Kristalllängen (Größenordnung μ) [14] ist diese Annahme gerechtfertigt.

Mit $|\omega_0 \dot{E}_0| \gg |\ddot{E}_0|$, $|\omega P_0^{NL}| \gg |\dot{P}_0^{NL}| \gg |\ddot{P}_0^{NL}|$ und

$|k \partial E_0 / \partial z| \gg |\partial^2 E_0 / \partial z^2|$ ergibt sich somit aus der Wellengleichung (3.2)

$$\epsilon \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{\partial E_0}{\partial t} - i \Delta \omega E_0 = i \frac{2\pi \omega \kappa}{\epsilon_1} P_0^{NL} \quad (3.9).$$

Mit dieser Gleichung, die nur noch erste räumliche und zeitliche Ableitungen des elektrischen Feldes enthält, wird die Wechselwirkung zwischen dem Lichtfeld und dem optisch nichtlinearen Medium beschrieben. Die Nichtlinearität ist in dem Quellterm der nichtlinearen Polarisierung enthalten. Die Berücksichtigung der Resonatorgeometrie erfolgt im Rahmen der sogenannten "Mean-Field"-Näherung, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

3.1.2 "MEAN-FIELD"-NÄHERUNG

Die "Mean-Field"-Näherung ist im Zusammenhang mit der theoretischen Beschreibung der optischen Bistabilität von großer Bedeutung. Wie sich gezeigt hat [15], kann die räumliche Variation des elektrischen Feldes im Resonator unter bestimmten Voraussetzungen vernachlässigt werden. Damit ist es möglich, das Feld im Resonator durch einen räumlich gemittelten Wert zu ersetzen.

Die "Mean-Field"-Näherung ist nur dann gerechtfertigt, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind [16]:

- I) die Absorption des elektrischen Feldes bezogen auf die Länge des Resonators klein gegen Eins ist ($\alpha L \ll 1$)
- II) der Transmissionskoeffizient klein gegen Eins ist ($T \ll 1$)
- III) die Resonatorverstimmung sehr viel kleiner ist als die freie Spektralbreite ($\Delta\omega 2L/c \ll 1$).

Die erste Forderung ($\alpha L \ll 1$) bedeutet, daß die Wechselwirkung zwischen dem elektrischen Feld und den Atomen nur sehr schwach ausgeprägt sein darf. Dies kann dadurch erreicht werden, daß man sehr kurze Resonatorlängen wählt. Darüberhinaus muß die Erfüllung der ersten Bedingung durch die Berechnung der Absorption des elektrischen Feldes in jedem konkreten Fall nachgeprüft werden. In der klassischen Beschreibung geschieht dies über die spezielle Wahl des nichtlinearen Anteils der Polarisierung in (3.9) und wird in Kapitel 4 durchgeführt.

Die zweite Bedingung ist mit der ersten verknüpft. Die geforderte schwache Kopplung des elektrischen Feldes an das Medium, die zu einer linearen Eingangs-Ausgangs-Charakteristik führen würde, wird durch die Wahl kleiner Transmissionskoeffizienten wieder kompensiert. Bei kleiner Transmission wird die Weglänge innerhalb der das elektrische Feld mit dem Medium wechselwirkt, erheblich vergrößert. Der Rückkopplungsmechanismus des Resonators verstärkt damit die zum Auftreten der optischen Bistabilität erforderlichen Nichtlinearitäten.

Kleine Transmissionskoeffizienten werden im Experiment häufig durch die Verwendung von Spiegeln mit hohem Reflektionsvermögen erzielt, die auf das jeweils verwendete nichtlineare Medium aufgedampft werden.

Die dritte Forderung schließlich besagt, daß die Resonatorverstimmung sehr viel kleiner sein soll als der Abstand zweier benachbarter Resonatormoden, d.h. zweier benachbarter Resonanzfrequenzen des Resonators. Diese Forderung impliziert, daß das System ausschließlich mit der in Bezug auf die Frequenz des einfallenden Lichtfeldes nächstgelegenen Resonatormode beschrieben werden kann. Man spricht daher auch von einer Ein-Moden-Beschreibung der optischen Bistabilität.

Insgesamt kann man feststellen, daß die in Verbindung mit der "Mean-Field"-Näherung gestellten Anforderungen an die Resonatoreigenschaften, wie kurze Kristalllängen, kleine Transmission und geringe Resonatorverstimmung in den meisten, bisher durchgeführten Experimenten zur optischen Bistabilität, erfüllt wurden. Damit ist die Verwendung dieser Approximation in der theoretischen Beschreibung gerechtfertigt.

3.1.3 BERÜCKSICHTIGUNG DER RESONATORGEOMETRIE

Sind die Bedingungen der "Mean-Field"-Näherung erfüllt, kann die räumliche Mittelung über die Resonatorlänge L mit

$$\frac{1}{L} \int_0^L dz E_0(z, t) = \bar{E}_0$$

bzw.

$$\frac{1}{L} \int_0^L dz P_0^{NL}(z, t) = \bar{P}_0^{NL} \quad (3.10)$$

durchgeführt werden. Man erhält aus (3.9)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(E_0(L, t) - E_0(0, t) \right) + \frac{\partial}{\partial t} \bar{E}_0 = i \Delta \omega \bar{E}_0 + \frac{2\pi}{\epsilon_1} \omega_R \bar{P}_0^{NL} \quad (3.11)$$

und kann damit die räumliche Ableitung des elektrischen Feldes eliminieren.

Durch die Vernachlässigung räumlicher Effekte führen die Randbedingungen des Fabry-Perot- sowie des Ring-Resonators (Abb.1 und Abb.2) zu identischen Gleichungen [17]. Lediglich die Absorptionslänge ist beim Ringresonator halb so groß wie beim Fabry-Perot-Resonator. Dies trägt der Tatsache Rechnung, daß im Fabry-Perot-Resonator hin- *und* rücklaufende Wellen mit dem Medium wechselwirken, während beim Ring-Resonator nur *eine* fortlaufende Welle existiert.

Im folgenden werden die Randbedingungen des Fabry-Perot-Resonators, der in den Experimenten fast ausschließlich Verwendung findet, berücksichtigt.

Diese lauten [13,18]

$$\begin{aligned}
 E_F(0,t) &= \sqrt{R} E_B(0,t) + \sqrt{T} E_I(t) \\
 E_R(t) &= -\sqrt{R} E_I(t) + \sqrt{T} E_B(0,t) \\
 E_B(L,t) &= \sqrt{R} E_F(L,t) \\
 E_T(t) &= \sqrt{T} E_F(L,t) \quad (3.12),
 \end{aligned}$$

wobei die vorwärts (E_F) und rückwärts (E_B) laufenden Wellen im Resonator mit der Länge L in Abb.5 schematisch angedeutet sind.

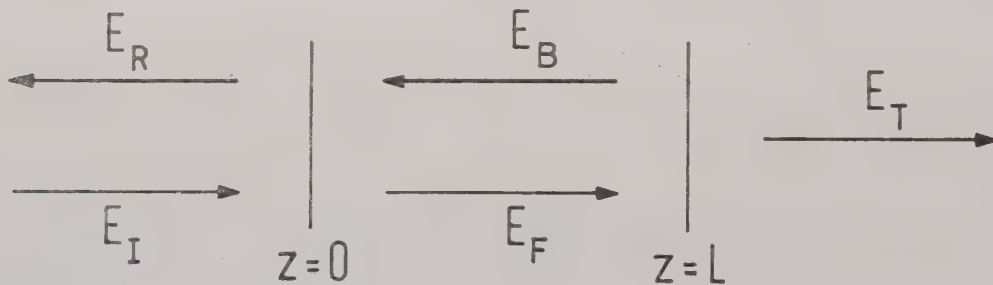


Abbildung 5. : Schematische Darstellung der vorwärts (E_F) und rückwärts (E_B) laufenden Wellen in einem Fabry-Perot-Resonator. E_I bezeichnet die einfallende, E_R die reflektierte und E_T die transmittierte Amplitude des elektrischen Feldes.

Mit der Nebenbedingung $E_R(t) + E_I(t) = E_T(t)$ und

$$\begin{aligned}
 E_F(L,t) &= E_T / \sqrt{T} = E_0(L,t) \\
 E_F(0,t) &= E_0(0,t) \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

ergibt sich aus (3.12) für die Differenz des elektrischen Feldes zwischen den Resonatorenenden in der "Mean-Field"-Näherung ($T \ll 1$)

$$\begin{aligned} E_o(L, t) - E_o(0, t) &\approx (1 - \sqrt{R}) \left(\frac{E_T}{\sqrt{T}} - \frac{E_I}{\sqrt{T}} \right) \\ &= (1 - \sqrt{R}) \left(\bar{E}_o - \frac{E_I}{\sqrt{T}} \right) \quad (3.14). \end{aligned}$$

Die Randbedingung (3.14), die nur noch von dem mittleren Feld im Resonator, sowie von dem einfallenden Lichtfeld abhängt, wird in (3.11) eingesetzt. Unter Berücksichtigung von (3.3) und (3.5) erhält man

$$\frac{\partial \bar{E}_o}{\partial t} = -K \left(\bar{E}_o - \frac{E_I}{\sqrt{T}} \right) + i \Delta \omega \bar{E}_o + i \omega_R \left(\frac{\epsilon_{NL}}{2\epsilon_L} \right) \bar{E}_o \quad (3.15)$$

mit der Konstanten $K = (1 - \sqrt{R})\bar{c}/L$, die die Verluste des Resonators angibt.

Gleichung (3.15) beschreibt die zeitliche Änderung der mittleren Feldamplitude im Resonator bei vorgegebenem Eingangsfeld. Sie stellt die Ausgangsgleichung für die klassische Beschreibung der optischen Bistabilität dar.

Die weitere Behandlung erfolgt über die spezielle Wahl der komplexen intensitätsabhängigen dielektrischen Funktion, die die Nichtlinearität in (3.15) festlegt. Dies wird in Kapitel 4 durchgeführt.

3.2 SEMIKLASSISCHE BESCHREIBUNG

Die semiklassische Beschreibung der optischen Bistabilität enthält zusätzlich zu den makroskopischen Maxwell-Gleichungen die optischen Blochgleichungen für die Polarisation und die Inversion und berücksichtigt damit die intrinsischen Eigenschaften des Mediums in allgemeiner Form. Diese Materialgleichungen werden quantenmechanisch, d.h. mikroskopisch hergeleitet und anschließend zu makroskopischen Größen gemittelt.

3.2.1 DIE MAXWELL-BLOCH-GLEICHUNGEN

Das Modellsystem besteht aus N identischen, homogen verbreiterten Zwei-Niveau-Atomen, die mit dem klassischen Lichtfeld wechselwirken. Der Hamiltonoperator lautet $H = H_0 + H_1$, wobei H_0 das isolierte Zwei-Niveau-System beschreibt und

$$H_1 = -E \cdot \hat{p}$$

die Wechselwirkungsenergie in der Dipolapproximation angibt [19]. $\hat{p}$ ist der Polarisationsoperator. Entwickelt man nach den Eigenfunktionen des ungestörten Systems resultiert die Darstellung

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix},$$

wobei ρ die Dichtematrix des Zwei-Niveau-Systems [20] und E_1, E_2 die Energien des unteren und oberen Niveaus sind.

Die Inversion wird über

$$D = (\rho_{11} - \rho_{22}) = \text{Sp}(\rho \sigma_z) \quad (3.16)$$

mit der Pauli-Spin-Matrix σ_z angegeben. Da sich die Behandlung der optischen Bistabilität auf passive Medien beschränkt, ist die Inversion durch diese Definition eine positive Größe. Die Zeitentwicklung der makroskopischen Polarisation erhält man durch Spurbildung ($\dot{\rho} = \text{Sp}(\rho \dot{\rho})$) über die Operatorgleichung für den Polarisationsoperator:

$$\hbar^2 \left(\frac{d^2 \hat{\rho}}{dt^2} \right) + \left[\left[\hat{\rho}, H \right], H \right] = i \hbar \left[\frac{\partial H}{\partial t}, \hat{\rho} \right].$$

Entsprechend ergibt sich über die quantenmechanische Liouville-Gleichung

$$i \hbar \dot{\rho} = - [\rho, H]$$

durch Multiplikation mit der Pauli-Spin-Matrix σ_z über (3.16) die Zeitentwicklung für die Inversion. Durch die phänomenologische Addition von Dämpfungstermen in beiden Gleichungen werden irreversible zeitliche Entwicklungsprozesse berücksichtigt. Damit erhält man das folgende Differentialgleichungssystem der Maxwell-Bloch-Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{E}} + c^2 \nabla^2 \vec{E} &= -4\pi \ddot{\vec{P}} \\ \ddot{\vec{P}} + 2\gamma_1 \dot{\vec{P}} + \omega_a^2 \vec{P} &= 2\omega_0 \frac{1}{\hbar} \vec{E} D \\ \dot{D} &= \gamma_2 (D_0 - D) - \frac{2}{\hbar \omega_a} \vec{E} \cdot \vec{P} \end{aligned} \quad (3.17).$$

Die erste Gleichung ist die bekannte Wellengleichung für das elektrische Feld (3.2). Die beiden Materialgleichungen beschreiben über die Polarisation $\vec{P}$ die Kopplung des Lichtfeldes an das optisch nichtlineare Medium.

ω_0 ist die Frequenz des einfallenden Lichtfeldes, die nicht mit der atomaren Resonanzfrequenz ω_a übereinstimmen muß. Über $\omega_a = \omega_0 + \Delta\omega$ und $\Delta\omega \ll \omega_0$ ergibt sich ein sogenanntes atomares detuning.

μ^2 gibt das Dipolmoment-Matrixelement und γ_1, γ_2 die phänomenologisch addierten, inversen Relaxationszeiten an. Die Inversion im thermischen Gleichgewicht wird mit D_0 bezeichnet.

Entsprechend der klassischen Beschreibung wird im folgenden die langsam veränderliche Amplituden-Approximation für die skalaren Größen E und P , sowie die "Mean-Field"-Näherung unter Berücksichtigung der Randbedingungen für den Fabry-Perot-Resonator durchgeführt.

Mit

$$E = E_0 e^{i(kz - \omega_0 t)} + c.c.$$

bzw.

$$P = P_0 e^{i(kz - \omega_0 t)} + c.c.$$

und $k = \omega_0/c$, sowie der Skalierung auf dimensionslose Größen

$$P_0 = \frac{i\mu}{2} \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} D_0 P, \quad E_0 = \frac{\hbar \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2\gamma_1} E$$

$$D = D_0 \tilde{D}, \quad D_0 = \frac{2}{V} \tilde{D}_0, \quad \frac{\Delta\omega}{\gamma_1} = \Delta \quad (3.18)$$

resultiert zunächst

$$\dot{E} + c \nabla E = - \frac{4\pi \omega_0 \mu^2 D_0}{\hbar \gamma_1 V} P$$

$$\gamma_1^{-1} \dot{P} = - (1 + i\Delta) P + ED$$

$$\gamma_2^{-1} \dot{D} = - \frac{1}{2} (EP^* + E^*P) - D + 1 \quad (3.19),$$

wobei $\tilde{D}=D$ und $\tilde{D}_0=D_0$ gesetzt wurde.

Betrachtet man sich für einen Augenblick den stationären Fall, ergibt sich für das elektrische Feld aus (3.19)

$$\nabla E = - \alpha E \frac{(1 - i\Delta)}{1 + \Delta^2 + |E|^2} \quad (3.20)$$

mit

$$\alpha = \frac{4\pi \omega_0 \mu^2 D_0}{\hbar \gamma_1 V c}$$

Gleichung (3.20) verdeutlicht, daß die Vernachlässigung der räumlichen Änderung des elektrischen Feldes nur bei kleiner Absorption gerechtfertigt ist. Der lineare Absorptionskoeffizient α ist bei dem betrachteten Zwei-Niveau-System proportional zu dem Dipolmoment-Matrixelement und der Inversion im thermischen Gleichgewicht. Er wird mit zunehmender Lichtintensität durch die Übergänge der Atome vom unteren ins obere Niveau verkleinert. Dies wird über den nichtlinearen Anteil beschrieben. Daher muß die Forderung $\alpha L \ll 1$ in diesem Fall immer auf den linearen Absorptionskoeffizienten, der die maximale Absorption angibt, bezogen werden.

Die Resonatorverstimmung $\Delta\omega$ (3.7) wird innerhalb der semiklassischen Beschreibung üblicherweise durch die gegenüber (3.12) erweiterten Fabry-Perot-Resonatorrandbedingungen [21]

$$E_z(0,t) = \sqrt{R} E_B(0,t) e^{-i\tilde{\theta}} + \sqrt{T} E_z(t)$$

$$E_R(t) = -\sqrt{R} E_z(t) + \sqrt{T} E_B(0,t) e^{i\tilde{\theta}}$$

$$E_B(L,t) = \sqrt{R} E_F(L,t), \quad E_T(t) = \sqrt{T} E_F(L,t) \quad (3.21),$$

mit $\theta = 2L\Delta\omega/c$ eingeführt.

Zusammen mit (3.13), der Forderung $T \ll 1$ und $\theta \ll 1$, sowie der Mittelung des elektrischen Feldes, der Polarisation und der Inversion über die Kristalllänge L (3.10) ergibt sich schließlich aus (3.19)

$$\begin{aligned}\gamma_0^{-1} \dot{E} &= - \left(E - \frac{E_I}{\sqrt{T}} \right) + i\theta E - 2CP \\ \gamma_i^{-1} \dot{P} &= - (1 + i\Delta) P + ED \\ \gamma_i^{-1} \dot{D} &= -D + 1 - \frac{1}{2} (EP^* + E^*P) \quad (3.22),\end{aligned}$$

mit $\theta = 2\tilde{\theta}/T$, $C = \alpha L/2T$ (3.23) und $\tilde{E}, \tilde{P}, \tilde{D} = E, P, D$.

$\gamma_0 = cT/L$ gibt die inverse Relaxationszeit des elektrischen Feldes an.

Die gekoppelten Differentialgleichungen (3.22) repräsentieren die semiklassische Beschreibung der optischen Bistabilität in der "Mean-Field"-Näherung. Sie werden zur Untersuchung der zeitabhängigen Phänomene bei der optischen Bistabilität verwendet (Kapitel 5). Durch die Definitionen (3.18) und (3.23) sind die Kopplungskonstante C und die Verstimmungsparameter θ und Δ im Rahmen der "Mean-Field"-Näherung frei wählbare Größen. Zusammen mit den drei Relaxationszeiten und dem einfallenden Lichtfeld bestimmen sie das Gleichungssystem (3.22).

3.2.2 DIE MAXWELL-DEBYE-GLEICHUNGEN

In der bisherigen theoretischen Formulierung wurden über die "Mean-Field"-Näherung u.a. kurze Kristalllängen ($\alpha L \ll 1$) und kleine Resonatorverstimmungen ($\theta \ll 1$) gefordert. Die Vernachlässigung der räumlichen Effekte ist im entgegengesetzten Fall nicht mehr gerechtfertigt. Es tritt Multistabilität auf.

Die Beschreibung der optischen Bistabilität unter Verwendung großer Resonatorlängen und Resonatorverstimmungen, die in dieser Arbeit nicht behandelt wird, hat vor allem im Hinblick auf das chaotische Verhalten der zeitabhängigen Lösungen (Ikeda-Instabilität) wichtige Ergebnisse geliefert (Kapitel 5) und soll daher in ihren wesentlichen Grundzügen vorgestellt werden [22].

Die Basis bilden die semiklassischen Maxwell-Bloch-Gleichungen. Ausgehend von (3.19) mit der Berücksichtigung der räumlichen Ableitung des elektrischen Feldes, wird die Polarisation unter der Bedingung $\gamma_2 \ll \gamma_1$ adiabatisch eliminiert. Mit

$$P = \frac{E D}{1 + i \Delta} = \frac{E D (1 - i \Delta)}{\Delta^2 + 1}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{E} + c \nabla E &= - \frac{g}{\Delta^2 + 1} (1 - i \Delta) E D \\ \dot{D} &= - \gamma_2 (D - 1) - \frac{\gamma_2}{\Delta^2 + 1} |E|^2 D \end{aligned} \quad (3.24),$$

wobei

$$g = \frac{4 \pi \omega_0 \mu^2 D_0}{\hbar \gamma_1 V}.$$

Die Wahl der Resonatoranordnung spielt innerhalb dieser Formulierung eine wichtige Rolle. Während mit den Randbedingungen des Fabry-Perot-Resonators (3.21) für vorwärts und rückwärts laufende Wellen aus (3.24) vier Gleichungen resultieren würden, bietet der Ring-Resonator den Vorteil, die Ausbreitung des elektrischen Feldes auf eine Richtung zu beschränken. Daher werden die Randbedingungen dieses Resonatortyps (Abb.2) verwendet.

Sie lauten [23]

$$E_T(t) = \sqrt{T} E(L, t)$$

$$E(0, t) = \sqrt{T} E_T(t) + R e^{i\Theta T} E(L, t - t_R) \quad (3.25).$$

t_R gibt die Zeit an, die das Lichtfeld benötigt, um von Spiegel 2 nach Spiegel 1 zu gelangen und

$$\Theta = \frac{(\omega_R - \omega_0) \mathcal{L}}{c T}$$

definiert die Resonatorverstimmung bezogen auf die Linienbreite des Resonators mit der Länge $\mathcal{L} = 2(L+1)$.

Skaliert man (3.24) über $\tau_R = t - z/c$ auf die Verzögerungszeit τ_R , kann das elektrische Feld in der folgenden Integralform angegeben werden

$$E(z, \tau_R + \frac{z}{c}) = E(0, \tau_R) e^{-\left[g W(\tau_R, z) (1 - i\Delta) / (\Delta^2 + 1) \right]} \quad (3.26)$$

mit

$$W(\tau_R, z) = \int_0^z dz' \mathcal{D}(\tau_R + \frac{z'}{c}, z') \quad (3.27).$$

Setzt man (3.26) und (3.27) in die Gleichung für die Inversion (3.24) ein und integriert über z , folgt

$$\frac{\partial W(z, \tau_R)}{\partial \tau_R} = -\gamma_2 (W + z) + \frac{\gamma_2}{2g} \left(e^{-\frac{2g W}{\Delta^2 + 1}} - 1 \right) \quad (3.28).$$

Durch die Berücksichtigung der Randbedingungen (3.25) kann die räumliche Koordinate eliminiert werden, und man erhält schließlich aus (3.26) und (3.28) den folgenden Gleichungstyp [22]

$$E(0, t) = -T E_I(t) + R E(0, t - \tau_R) f_1(W(t))$$

$$\dot{W} = -\gamma_2 W(t) - |E(0, t - \tau_R)|^2 f_2(W(t)) \quad (3.29).$$

(3.29) stellt eine Differential-Differenzen-Gleichung dar. Das elektrische Feld zum Zeitpunkt t hängt von dem Feld zu einem früheren Zeitpunkt ab und ist über die Inversion an das Medium gekoppelt. Die fest vorgegebene Relaxationszeit γ_2 wird als Debysche Relaxationszeit und das Gleichungssystem (3.29) als die Maxwell-Debye-Gleichungen bezeichnet.

Im Grenzfall großer Resonatorlängen ($\alpha L \gg 1$) und damit verbundenen großen Resonatorverstimmungen θ dominiert die Verzögerungszeit τ_R gegenüber der Relaxationszeit γ_2^{-1} des Mediums ($\tau_R \gamma_2 \gg 1$). Durch adiabatische Elimination der Polarisation W führt die Berechnung der resultierenden Differenzengleichung zu chaotischem Verhalten, das durch den verzögerten Rückkopplungsmechanismus im Resonator verursacht wird. Das Auftreten dieser Instabilität (Ikeda-Instabilität) konnte auch experimentell beobachtet werden. Dabei wurde ein ca. 120 cm langer Glasfiber-Resonator verwendet [24].

3.3 STATISTISCHE BESCHREIBUNG

Die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie beinhaltet eine Vielzahl von Freiheitsgraden, die naturgemäß innerhalb einer theoretischen Beschreibung nicht alle berücksichtigt werden können. Die bisher diskutierten Modelle beschränken sich daher auf einige wenige makroskopische, sogenannte relevante Variablen. Die zeitliche Entwicklung der relevanten Variablen, die in der klassischen und semiklassischen Beschreibung über die Differentialgleichungen (3.15) und (3.22) berechnet werden kann, ist durch die Angabe der Anfangsbedingungen vollständig bestimmt. Man spricht von deterministischen Gleichungen.

In realen Systemen ist dieser Determinismus nicht gegeben. So beobachtet man beispielsweise, daß das Lichtfeld des Lasers in der Intensität und der Phase um einen bestimmten Mittelwert zeitlich fluktuiert. Diese Fluktuationen sind rein stochastischer Natur. Sie spielen vor allem dann eine wichtige Rolle, wenn das durch die deterministischen Gleichungen beschriebene System instabil wird.

Instabilitäten treten, wie bereits erwähnt, auch bei der optischen Bistabilität auf. Diese machen sich dadurch bemerkbar, daß bereits kleinste Störungen aus den Gleichgewichtslagen der relevanten Variablen (Fluktuationen) den Übergang des Systems in einen neuen Zustand bewirken. Um zu entscheiden, welchen Zustand das System tatsächlich annimmt ist es deshalb erforderlich, die Fluktuationen in die theoretische Beschreibung einzubeziehen. Dies geschieht im folgenden über den Formalismus der Langevin- und der Fokker-Planck-Gleichung.

3.3.1 LANGEVIN-GLEICHUNG

Die Langevin-Gleichung ergibt sich aus den deterministischen Gleichungen (3.15) und (3.22) durch phänomenologische Addition von Fluktuationskräften, auch Rauschkräften genannt. Damit wird die Kopplung der relevanten an die bisher vernachlässigten mikroskopischen Variablen simuliert. Aus den deterministischen werden stochastische Differentialgleichungen.

Die allgemeine Form der Langevin-Gleichung für eine Variable lautet

$\dot{\xi} = -\gamma f(\xi, t) + F(t)$ (3.30) mit der Fluktuationskraft $F(t)$ und der Dämpfungskonstanten γ . Da $F(t)$ und damit auch $\xi(t)$ stochastische, zufällige Größen sind, können nur statistische Aussagen über das System gemacht werden. Dazu betrachtet man, entsprechend wie in der Thermodynamik (Gibbs-Ensemble), ein ganzes Ensemble von identischen Systemen, d.h. von Systemen mit denselben Bewegungsgleichungen.

Die Fluktuationskraft $F(t)$ variiert dann von System zu System. Die zeitliche Entwicklung der Variablen $\xi(t)$ wird durch die Mittelung über das Ensemble berechnet. Um diese Ensemble-Mittelung durchführen zu können, müssen bestimmte Bedingungen an die stochastische Fluktuationskraft gestellt werden.

Zunächst sollte die Bewegungsgleichung (3.30) für die gemittelte Variable $\langle \xi(t) \rangle$ der deterministischen entsprechen. Daher wird angenommen, daß der Mittelwert der Fluktuationskraft verschwindet, also $\langle F(t) \rangle = 0$ (3.31). Weiterhin wird gefordert, daß die rein zufälligen, statistisch verteilten Fluktuationskräfte, die zu verschiedenen Zeiten auf das System einwirken, nicht miteinander korreliert sind. Mit

$$\langle F(t) F(t') \rangle = 2Q \delta(t - t') \quad (3.32)$$

wird zum Ausdruck gebracht, daß die Fluktuationskräfte kein Gedächtnis haben, d.h. δ -korreliert sind. Aus dieser sogenannten Markoff-Annahme ergibt sich, daß man die Eigenschaften des Systems zur Zeit $t + \Delta t$ berechnen kann, wenn man das System zur Zeit t kennt.

Die Konstante Q gibt die Stärke des durch die Fluktuationen erzeugten Rauschens an. Da die Fourier-Transformierte der Korrelationsfunktion (3.32), also die spektrale Dichte, unabhängig von der Frequenz ist, spricht man von weißem Rauschen.

Durch die Berechnung der mittleren kinetischen Energie des Systems kann man zeigen, daß Q im thermischen Gleichgewicht proportional zur Dämpfungskonstanten γ ist (Dissipations-Fluktuations-Theorem) [25]. Die Größe der Fluktuation wird demnach durch die Dämpfung oder anders ausgedrückt, durch die Dissipation des Systems bestimmt.

Mit der statistisch verteilten Fluktuationskraft $F(t)$ ist schließlich eine Verteilungsfunktion verbunden, für die üblicherweise eine Gaußverteilung betrachtet wird. Dies hat zur Folge, daß alle ungeraden Momente der Fluktuationskraft verschwinden und alle geraden Momente durch das zweite gegeben sind. Es gilt

$$\begin{aligned} & \langle F(t_1) F(t_2) \dots F(t_{n-1}) F(t_n) \rangle \\ &= \sum_p \langle F(t_1) F(t_2) \rangle \dots \langle F(t_{n-1}) F(t_n) \rangle \quad (3.33), \end{aligned}$$

wobei über alle Permutationen p summiert wird.

Mit diesen Bedingungen ist die Fluktuationskraft definiert. Die Berechnung der Mittelwerte kann über die Lösung der Langevin-Gleichung (3.30) erfolgen und ist bei linearen Systemen leicht durchführbar. Bei nichtli-

nearen Langevin-Gleichungen wird dies jedoch wesentlich schwieriger. In diesen Fällen ist es oftmals zweckmäßig, die zur Langevin-Gleichung stochastisch äquivalente Fokker-Planck-Gleichung zu behandeln.

3.3.2 FOKKER-PLANCK-GLEICHUNG

Mit der Berechnung von Mittelwerten ist in der statistischen Beschreibung auch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung verbunden. So läßt sich der über ein Ensemble von Systemen gemittelte Wert einer kontinuierlichen Variablen x durch

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x \, W(x, t) \quad (3.34)$$

angeben. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $W(x, t)$, die in der Literatur auch als Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnet wird, wichtet alle möglichen Realisierungen, die die Variable x zum Zeitpunkt t annehmen kann mit einem bestimmten Wert. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, die Variable x in der Konfiguration (x, t) zu finden. Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt, können der Mittelwert (3.34) sowie höhere Momente leicht berechnet werden.

Die zeitliche Änderung von $W(x, t)$ wird durch die Fokker-Planck-Gleichung beschrieben, die im folgenden über die Kramers-Moyal-Entwicklung hergeleitet wird [26].

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu verschiedenen Zeiten sind über

$$W(x, t + \tau) = \int P(x, t + \tau | x', t) W(x', t) dx' \quad (3.35)$$

mit der Übergangswahrscheinlichkeit $P(x, t+\tau | x', t)$ verbunden. Da man sich für die Ableitung

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t}$$

interessiert, ist die Kenntnis der Übergangswahrscheinlichkeit für kleine Zeiten τ erforderlich. Dazu wird zunächst angenommen, daß alle Momente der Form

$$\begin{aligned} M_n(x', t, \tau) &= \langle (\xi(t+\tau) - \xi(t))^n \rangle \Big|_{\xi(t)=x'} \\ &= \int (x - x')^n P(x, t+\tau | x', t) dx \end{aligned} \quad (3.36)$$

bekannt seien. $\Big|_{\xi(t)=x'}$ bedeutet, daß die stochastische Variable ξ zur Zeit t den scharfen Wert x' haben soll. Mit der Identität

$$P(x, t+\tau | x', t) = \int \delta(y-x) P(y, t+\tau | x', t) dy \quad (3.37)$$

und einer formalen Taylor-Entwicklung der δ -Funktion: $\delta(y-x) = \delta(x'-x+y-x')$, ergibt sich zusammen mit (3.36) der folgende Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} &P(x, t+\tau | x', t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \int (y-x')^n P(y, t+\tau | x', t) dy \delta(x'-x) \\ &= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n M_n(x', t, \tau) \right] \delta(x'-x) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Dieser kann in (3.35) eingesetzt werden. Für kleine Zeiten τ , d.h. $W(x, t+\tau) = W(x, t) + \tau(\partial/\partial t)W(x, t) + \dots$ erhält man durch linearisieren

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \tau = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \left[M_n(x, t, \tau) \frac{1}{n!} \right] W(x, t)$$

bzw. durch entsprechendes Vorgehen in (3.36) mit $\xi(t+\tau) - \xi(t) \approx \dot{\xi}(t)\tau$

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n D^{(n)}(x,t) W(x,t) \quad (3.39).$$

Dies ist die Kramers-Moyal-Entwicklung. Der Differentialoperator $\left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n$ wirkt sowohl auf die Koeffizienten

$$D^{(n)}(x,t) = \frac{1}{n!} \left\langle \left(\dot{\xi}(t) \right)^n \right\rangle \Big|_{\xi(t)=x} \quad (3.40),$$

als auch auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W(x,t)$. Die Kramers-Moyal-Entwicklung enthält eine unendliche Zahl von Koeffizienten. Mit Hilfe des Pawula-Theorems kann man jedoch zeigen, daß diese Entwicklung bei positiven Übergangswahrscheinlichkeiten entweder nach dem ersten, oder nach dem zweiten Term abbricht, falls auch nur ein Koeffizient höherer Ordnung verschwindet.

Bei Gauß-Prozessen reduziert sich (3.39) damit auf

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x,t) \right] W(x,t) \quad (3.41).$$

Dies ist die Fokker-Planck-Gleichung. Sie beschreibt die zeitliche Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Hilfe eines Drift- und eines Diffusionsterms. Entsprechend bezeichnet man die Koeffizienten $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ als Drift- bzw. Diffusionskoeffizienten. Über die Beziehung (3.40) wird die Verbindung zur Langevin-Gleichung (3.30) hergestellt.

In der statistischen Beschreibung ist es daher möglich, wahlweise die Langevin-Gleichung (3.30) zusammen mit (3.31) und (3.32) oder aber die da-

zu äquivalente Fokker-Planck-Gleichung (3.41) zur Berechnung des Mittelwertes einer Variablen zu verwenden.

4. OPTISCHE BISTABILITÄT BEI ZWEI-PHOTONEN-ÜBERGÄNGEN -STATIONÄRE LÖSUNGEN DER STOCHASTISCHEN GLEICHUNGEN-

In diesem Kapitel wird der Einfluß von Fluktuationen bei der optischen Bistabilität im stationären Fall untersucht.

Ausgehend von der klassischen Beschreibung (Kap.3.1) wird zunächst unter Verwendung der intensitätsabhängigen komplexen dielektrischen Funktion einer Zwei-Photonen-Absorption (Kap.4.1) die Langevin-Gleichung für das fluktuierende Lichtfeld im Resonator aufgestellt (Kap.4.2). Die dazu äquivalente Fokker-Planck-Gleichung wird durch die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung nach Produkten von trigonometrischen Funktionen und verallgemeinerten Laguerre-Polynomen im stationären Fall gelöst (Kap.4.3). Dabei werden die Entwicklungskoeffizienten über die Methode des Matrix-Kettenbruch-Verfahrens numerisch berechnet. Mit Hilfe der gewonnenen Resultate (Kap.4.4) können auch Aussagen über die Photonenstatistik des Lichtfeldes gemacht werden (Kap.4.5).

4.1 DIE ERZEUGUNG VON EXZITONENMOLEKÜLEN DURCH ZWEI-PHOTONEN-ABSORPTION

Im Hinblick auf eine eventuelle spätere technologische Anwendung der optischen Bistabilität ist die Verwendung von Halbleitermaterialien von besonderem Interesse. Neben der Möglichkeit sehr kleine Halbleiterplättchen herzustellen (Größenordnung μ), zeichnen sich diese vor allem durch die extrem kurzen Schaltzeiten zwischen den Zuständen niedriger und hoher Transmission (im Bereich Pikosekunden), sowie durch den relativ geringen erforderlichen Energieaufwand (Größenordnung W/cm^2) aus [14,27,28].

Die optischen Eigenschaften von Halbleitern basieren auf der elektronischen Anregung durch Licht. Unter Absorption eines Photons mit geeigneter Energie, wird der Übergang eines Elektrons vom gefüllten Valenz- ins leere Leitungsband bewirkt. Zurück bleibt eine Elektronenfehlstelle im Valenzband, das sogenannte Loch, das zusammen mit dem Elektron im Leitungsband über die attraktive Coulomb-Wechselwirkung ein gebundenes Elektron-Loch-Paar, das Exziton bildet.

Exzitonen stellen die energetisch niedrigsten Elementaranregungen eines Halbleiters dar.

Während in Halbleitern mit kleiner Bandlücke (z.B. InSb) die Exzitonenbindungsenergien so gering sind, daß die Exzitonen sofort ionisieren, sind die Exzitonen in Halbleitern mit großer Bandlücke (z.B. CuCl) relativ stabil [3]. In diesen Halbleitern beobachtet man auch das Auftreten eines gebundenen Zustandes zweier Exzitonen, die Exzitonenmoleküle.

Exzitonenmoleküle können durch einen Zwei-Photonen-Absorptionsprozeß erzeugt werden [29]. Die Übergangswahrscheinlichkeit für diesen Prozeß ist sehr groß. Zunächst bildet das mit Hilfe des ersten Photons erzeugte Exziton einen nahezu resonanten Zwischenzustand. Danach können alle in-

nerhalb der großen räumlichen Ausdehnung der Exzitonen-Wellenfunktion befindlichen Valenzelektronen durch Absorption des zweiten Photons zur Entstehung des Exzitonenmoleküls beitragen. Man spricht daher auch von der großen Oszillatorstärke des Exzitonenmoleküls.

Die mit dem Zwei-Photonen-Absorptionsprozeß verbundenen nichtlinearen Änderungen der optischen Eigenschaften des Halbleiters führen zu einer intensitätsabhängigen dielektrischen Funktion. Diese wurde in einer Reihe von Arbeiten mit den Methoden der Vielteilchentheorie erfolgreich berechnet [30], sowie anhand verschiedener experimenteller Befunde [31,32] überprüft und wird im folgenden als konkretes Beispiel einer Zwei-Photonen-Absorption verwendet. Dies vor allem deshalb, da nach einem Vorschlag von Koch und Haug [33] die Nichtlinearität des Zwei-Photonen-Absorptionsprozesses zur Erzeugung optisch bistabilen Verhaltens ausgenutzt werden kann. Besonders kurze Schaltzeiten werden dadurch erzielt, daß man die Frequenz des einfallenden Lichtfeldes unterhalb der Zwei-Photonen-Resonanzfrequenz wählt [34]. Damit wird das Exzitonenmolekül nur virtuell erzeugt und kann im Vergleich zu seiner natürlichen Lebensdauer wesentlich schneller zerfallen.

Mit der kürzlich erfolgten ersten experimentellen Realisierung der optischen Bistabilität einer Zwei-Photonen-Absorption in CuCl [35] konnten die theoretischen Vorhersagen bestätigt werden.

4.2 ENTWICKLUNG DER LANGEVIN-GLEICHUNG FÜR DAS ELEKTRISCHE FELD

Den Ausgangspunkt für die folgenden Rechnungen bildet die in der klassischen Beschreibung (Kap. 3.1) entwickelte Differentialgleichung für das gemittelte elektrische Feld (3.15). Die darin auftretenden Nichtlinearitäten werden durch die dielektrische Funktion einer Zwei-Photonen-Absorption festgelegt. Diese hat die Form [30]

$$\epsilon(\omega_0) = \epsilon_\infty + \frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty) \omega_x^2}{\omega_x^2 - \omega_0^2 - \Omega^2(\omega_0)}$$

mit

$$\Omega^2(\omega_0) \approx \frac{4 n_p |M|^2 \omega_x (\omega_m - \omega_0)}{\omega_m (\omega_m - 2\omega_0 - i\gamma_m)} \quad (4.1)$$

ω_x , $\omega_m + i\gamma_m$ und ω_0 sind die Frequenzen des Exzitons, des Exzitonenmoleküls und des Photons. $|M|^2$ gibt das Matrixelement für die Bildung des Exzitonenmoleküls an und ϵ_0 sowie ϵ_∞ sind die nieder- und hochfrequenten dielektrischen Konstanten. Die Konzentration der Photonen im Medium n_p ist über die Beziehung

$$n_p = \frac{I_p}{v \hbar \omega_0} \approx \frac{\epsilon_1 |E_0|^2}{8 \pi \hbar \omega_0} \quad (4.2)$$

mit der Intensität des Lichtfeldes $I = |E_0|^2$ verknüpft. Dabei wurde die Energietransportgeschwindigkeit v über die Kontinuitätsgleichung berechnet [36] und die Relation $I_p = c\sqrt{\epsilon_1} |E_0|^2 / 8\pi$ verwendet.

Zur Vereinfachung des Problems wird die aus (4.2) resultierende Intensitätsabhängigkeit der dielektrischen Funktion (4.1) nur in niedrigster Ordnung berücksichtigt. Für den nichtlinearen Anteil der dielektrischen

Funktion $\varepsilon_{NL} = \varepsilon - \varepsilon_1$ erhält man aus (4.1) zusammen mit (4.2) durch Entwicklung

$$\omega_R \varepsilon_{NL} (|E_0|^2) / 2 \varepsilon_1 = (\Omega' + i \Omega'') |E_0|^2 \quad (4.3)$$

$$\text{mit } \Omega' = (\omega_m - 2\omega_0)R, \Omega'' = \gamma_m R \quad (4.4)$$

und

$$R = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_\infty)^2}{2\pi(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)} \frac{|M|^2 (\omega_m - \omega_0) \omega_R}{\hbar \omega_m \omega_R ((\omega_m - 2\omega_0)^2 + \gamma_m^2) \omega_0} \quad (4.5).$$

Mit diesem Ansatz ergibt sich für den Absorptionskoeffizienten

$\alpha = \Omega'' |E_0|^2 / \bar{c}$ unter Verwendung der Materialparameter für CuCl [30], sowie der in Frage kommenden Intensitäten (10^5 W/cm^2), bei einer Resonatorlänge $L = 1 \mu$ die Relation $\alpha L \approx 10^{-3}$.

Setzt man weiterhin kleine Transmissionskoeffizienten und geringe Resonatorverstimmung voraus, sind die Forderungen der "Mean-Field"-Näherung erfüllt, so daß der Ansatz (4.3) in die Gleichung für das gemittelte elektrische Feld (3.15) eingesetzt werden kann. Man erhält

$$\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial t} = K \frac{E_I}{\sqrt{T}} - \bar{E}_0 (K + \Omega'' |\bar{E}_0|^2) + i \bar{E}_0 (\Delta\omega + \Omega' |\bar{E}_0|^2) \quad (4.6).$$

Gleichung (4.6) beschreibt die zeitliche Änderung der gemittelten komplexen Feldamplitude im Resonator, die durch einen antreibenden Term, der das einfallende Lichtfeld enthält, sowie durch einen absorptiven und einen dispersiven Anteil gegeben ist.

Durch die Berücksichtigung von Fluktuationen (Kap. 3.3) ergibt sich schließlich aus (4.6) die Langevin-Gleichung für das fluktuierende Lichtfeld

$$\frac{\partial \bar{E}_0}{\partial t} = K \frac{E_I}{\sqrt{T}} - \bar{E}_0 (K + \Omega'' |\bar{E}_0|^2) + i \bar{E}_0 (\Delta\omega + \Omega' |\bar{E}_0|^2) + F(t) \quad (4.7).$$

Die komplexe Fluktuationskraft $F(t)$, die die Intensitätsfluktuationen des einfallenden Lichtfeldes, sowie die thermischen Fluktuationen im Medium beschreibt, genügt den folgenden Relationen

$$\begin{aligned} \langle F(t)F(0) \rangle &= \langle F^*(t)F^*(0) \rangle = 0 \\ \langle F(t)F^*(0) \rangle &= \langle F^*(t)F(0) \rangle = 2Q\delta(t) \quad (4.8), \end{aligned}$$

wobei Q den Diffusionskoeffizienten angibt.

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei darauf hingewiesen, daß die Berücksichtigung der Nichtlinearität in niedrigster Ordnung (4.3) bei der Zwei-Photonen-Absorption zu einer Begrenzung der Intensität des Lichtfeldes und damit zur globalen Stabilität des Systems führt.

Mit dem Ansatz $\bar{E}_0 = \sqrt{I}e^{i\phi}$ ergibt sich aus (4.6) unter der Annahme eines reellen einfallenden Lichtfeldes sofort

$$\dot{I} = 2K \frac{E_I}{\sqrt{I}} \sqrt{I} \cos \phi - 2KI - 2\Omega'' I^2 \quad (4.9)$$

mit $k, \Omega'' > 0$.

Die globale Stabilität ist eine notwendige Bedingung für die Berechnung der Verteilungsfunktion [4], die im nächsten Abschnitt vorgenommen wird.

4.3 LÖSUNG DER STATIONÄREN FOKKER-PLANCK-GLEICHUNG MIT HILFE DES MATRIX-KETTENBRUCH-VERFAHRENS

Die zur Langevin-Gleichung (4.7) stochastisch äquivalente Fokker-Planck-Gleichung lautet (Kap.3.3)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{E}_0} \left[\bar{E}_0 (K + \mathcal{R}'' |\bar{E}_0|^2) - i \bar{E}_0 (\Delta\omega + \mathcal{R}' |\bar{E}_0|^2) - K \frac{\bar{E}_0}{\sqrt{I}} \right] W + c.c. + 2Q \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{E}_0 \partial \bar{E}_0^*} \quad (4.10).$$

Die Driftterme enthalten den deterministischen Anteil der zeitlichen Entwicklung von $W(E_0, E_0^*, t)$, während der Diffusionsterm den Einfluß der stochastischen Fluktuationskraft beschreibt. Für die folgende Entwicklung der Verteilungsfunktion nach einem geeigneten Satz von Eigenfunktionen, ist es vorteilhaft, statt der gemittelten komplexen Feldamplituden E_0 , E_0^* die gemittelte Intensität I und die Phase ϕ als unabhängige Variablen zu verwenden. Mit $E_0 = \sqrt{I} e^{i\phi}$ folgt aus (4.10)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L W$$

mit dem Fokker-Planck-Operator

$$L = 2 \frac{\partial}{\partial I} I (K + \mathcal{R}'' I) - (\Delta\omega + \mathcal{R}' I) \frac{\partial}{\partial \phi} - 2 \left(K \frac{\bar{E}_0}{\sqrt{I}} \right) \sqrt{I} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial I} - \frac{1}{2I} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + 2Q \left(\frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} + \frac{1}{4I} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (4.11).$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich durch die Transformation auf die skalierten Größen

$$x = \left(\frac{\Omega'}{2Q} \right)^{1/2} I, \quad \tau = (2Q\Omega')^{1/2} t, \quad \varepsilon_i = \left(\frac{\Omega'}{2Q} \right)^{1/4} \frac{E_I}{\sqrt{I}},$$

$$K = (2Q\Omega')^{-1/2} K, \quad \Delta = (2Q\Omega')^{-1/2} \Delta\omega, \quad \omega'' = \frac{\Omega''}{\Omega'}$$

(4.12).

Die resultierende Gleichung lautet

$$\frac{\partial}{\partial \tau} W(x, \phi, \tau) = \mathcal{L}(x, \phi, \tau) W(x, \phi, \tau)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & 2 \frac{\partial}{\partial x} x (K + \omega'' x) - (\Delta + x) \frac{\partial}{\partial \phi} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4x} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ & - 2K\varepsilon_i \sqrt{x} \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2x} \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (4.13).$$

Die ersten beiden Zeilen des Fokker-Planck-Operators haben dieselbe Struktur, wie sie bei einem Ein-Moden Laser mit endlicher Verstimmung Δ auftritt [37]. Die dritte Zeile beschreibt den Einfluß des skalierten einfallenden Lichtfeldes ε_i .

Ein bewährtes Verfahren zur Lösung von Fokker-Planck-Gleichungen besteht darin, die Verteilungsfunktion nach geeigneten orthonormalen Polynomen zu entwickeln [37,38]. Da die skalierte Intensität in (4.13) im Intervall $[0, \infty]$ definiert ist, bilden die verallgemeinerten Laguerre-Polynome $L_m^\mu(x)$ zusammen mit der Winkelfunktion $\exp(i\mu\phi)$ den geeigneten Funktionsatz.

Die Laguerre-Polynome genügen den folgenden Orthogonalitätsrelationen [39]

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^\mu L_n^\mu(x) L_m^\mu(x) = \frac{\Gamma(n+\mu+1)}{n!} \delta_{n,m}$$

(4.14).

Für die späteren numerischen Rechnungen wird die Intensität mit einem frei wählbaren Faktor α in der Form $x = \alpha y$ (4.15) skaliert. Die Entwicklung der Verteilungsfunktion wird damit in der folgenden Form durchgeführt

$$W(x, \phi) = \frac{1}{2\pi\alpha} e^{-\gamma} \sum_{\substack{m=0 \\ \mu=0}}^{\infty} \left[\tilde{c}_m^{\mu} \gamma^{\mu/2} L_m^{\mu}(\gamma) e^{i\mu\phi} + c.c. \right] \quad (4.16),$$

wobei die komplexen Entwicklungskoeffizienten $\tilde{c}_m^{\mu}$ durch

$$\tilde{c}_m^0 = c_m^0/2 = c_m^{0*}/2, \quad \tilde{c}_m^{\mu} = c_m^{\mu} \text{ für } \mu \neq 0 \quad (4.17)$$

gegeben sind. Aus der Normierungsbedingung für die Verteilungsfunktion $W(x, \phi)$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dx W(x, \phi) = 1 \quad (4.18)$$

resultiert $c_0^0 = 1$ (4.19).

Setzt man (4.16) und (4.15) in die skalierte Fokker-Planck-Gleichung (4.13) ein, multipliziert die resultierenden Terme mit $\exp(-i\beta\phi)$ und integriert über ϕ von Null bis 2π erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_m \left(2 \frac{d}{d\gamma} \gamma (\kappa + \omega'' \alpha \gamma) - i (\Delta + \alpha \gamma) \beta \right. \\ & \left. + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{d\gamma} \gamma \frac{d}{d\gamma} - \frac{\beta^2}{4\alpha\gamma} \right) e^{-\gamma} \gamma^{\beta/2} L_m^{\beta} c_m^{\beta} \\ & - \kappa \varepsilon_i \sqrt{\gamma/\alpha} \sum_m \left[\left(\frac{d}{d\gamma} + \frac{1-\beta}{2\gamma} \right) e^{-\gamma} \gamma^{|\beta-1|/2} L_m^{|\beta-1|} c_m^{|\beta-1|} \right. \\ & \left. + \left(\frac{d}{d\gamma} + \frac{1+\beta}{2\gamma} \right) e^{-\gamma} \gamma^{|\beta+1|/2} L_m^{|\beta+1|} c_m^{|\beta+1|} \right] = 0 \quad (4.20). \end{aligned}$$

Erwähnenswert ist die Tatsache, daß die Terme, die die Kopplung an das externe Lichtfeld ε_i beschreiben, genau dem Ausdruck entsprechen, den man für die Kopplung eines klassischen harmonischen Oszillators an ein elek-

trisches Feld in der Liouville-Gleichung erhält, wenn man Wirkungs-Winkel-Variable verwendet [40].

Da das Produkt aus der Gewichtsfunktion $e^{-y} y^{\beta/2}$ und den Laguerre-Polynomen L_m^β Lösungen der Differentialgleichung

$$\left(\frac{d}{dy} y \frac{d}{dy} - \frac{\beta^2}{4y} \right) e^{-y} y^{\beta/2} L_m^\beta = - \left[y \frac{d}{dy} + \left(m + \frac{\beta}{2} + 1 \right) \right] e^{-y} y^{\beta/2} L_m^\beta \quad (4.21)$$

darstellen, können die in dem Diffusionsterm in (4.20) auftretenden Ableitungen zweiter Ordnung durch Einsetzen von (4.21) in (4.20) eliminiert werden. Darüberhinaus werden weitere Rekursionsformeln der Laguerre-Polynome verwendet, die im Anhang A aufgelistet sind. Diese erlauben es, die in (4.20) auftretenden Ableitungen erster Ordnung von L_m^β und $L_m^{\beta \pm 1}$, sowie die Produkte der Potenzen von der skalierten Intensität y mit L_m^β und $L_m^{\beta \pm 1}$ durch Terme auszudrücken, in denen nur noch die Laguerre-Polynome L_m^β allein enthalten sind.

Multipliziert man die resultierende Gleichung mit $y^{\beta/2} L_m^\beta$, integriert über y von Null bis Unendlich und nutzt die Orthogonalitätsrelationen (4.14) aus, ergibt sich der folgende Satz algebraischer Gleichungen für die Entwicklungskoeffizienten c_n^β

$$\begin{aligned} \dot{c}_n^\beta &= \alpha(n+\beta+1)(\omega''(2n+\beta) + i\beta) c_{n+1}^\beta \\ &- \{ (\kappa + \alpha \omega'')(2n+\beta) + \alpha \omega''(6n(n+\beta) + \beta^2) + i\beta((2n+\beta+1)\alpha + \Delta) \} c_n^\beta \\ &+ n \{ 2(\kappa - \omega''\alpha) + 3\omega''\alpha(2n+\beta) - 1/\alpha + i\beta\alpha \} c_{n-1}^\beta \\ &- 2\omega''\alpha n(n-1) c_{n-2}^\beta - n\kappa \varepsilon_i / \sqrt{\alpha} (c_{n-1}^{\beta+1} + c_{n-1}^{\beta+1*} \delta_{\beta,0}) \\ &+ \kappa \varepsilon_i / \sqrt{\alpha} (1 - \delta_{\beta,0}) c_n^{\beta-1} \quad (4.22). \end{aligned}$$

Der untere Index n der Entwicklungskoeffizienten c_n^β ist an die Indizes $n-2$, $n-1$, n und $n+1$ gekoppelt. Mit der entsprechenden Definition des Spaltenvektors

$$c_n = \begin{pmatrix} c_{2n}^0 \\ c_{2n+1}^0 \\ c_{2n}^1 \\ c_{2n+1}^1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

wird das Gleichungssystem (4.22) in die tridiagonale Vektorrelation

$\dot{c}_n = P_n c_{n+1} + Q_n c_n + R_n c_{n-1}$ (4.24) transformiert. Die Matrizen P_n , Q_n und R_n enthalten die in (4.22) auftretenden Vorfaktoren und sind in Anhang B angegeben.

Die tridiagonale Rekursionsformel für die Vektoren c_n (4.24) wird im folgenden mit dem von Risken und Vollmer entwickelten Matrix-Kettenbruch-Verfahren [26] im stationären Fall numerisch gelöst. Dieses Näherungsverfahren beinhaltet die Forderung, daß die in (4.16) verwendete Entwicklung der Verteilungsfunktion relativ schnell konvergiert und damit von der unendlichen Zahl der Entwicklungskoeffizienten in (4.24) nur endlich viele berücksichtigt werden müssen.

Im Hinblick auf den zu untersuchenden Einfluß von Fluktuationen eignet sich dieses Verfahren besonders gut, wenn die Verteilungsfunktion eine glatte Form aufweist und keine Peak-Struktur besitzt. Dies ist bei großen Rauschstärken gegeben.

Im Gegensatz dazu haben Graham und Schenzle eine Näherungsmethode für den Grenzfall kleiner Fluktuationen entwickelt, die sie zur Untersuchung der optischen Bistabilität in einem Zwei-Niveau-System verwendeten [41].

Mit den Bedingungen $c_n^\beta = 0 \quad \forall \beta = B$ und $c_n = 0 \quad \forall n > N$ wird die Zahl der Vektorkomponenten in (4.24) auf B und die Anzahl der Vektoren auf N be-

grenzt. Natürlich müssen die oberen Grenzen von N und B bei der numerischen Berechnung so festgelegt werden, daß eine optimale Genauigkeit der Ergebnisse erzielt wird.

Mit dieser Näherung kann das Gleichungssystem (4.24) iterativ gelöst werden. Im stationären Fall erhält man mit dem Ansatz $c_n = S_n c_{n-1}$ (4.25) für $n=N$ aus (4.24)

$$c_n = (-Q_N)^{-1} R_N c_{N-1} = S_N c_{N-1} \quad (4.26). \quad \text{Für die Werte } 0 \leq n < N \text{ ergibt sich entsprechend}$$

$$S_n = (-Q_n - P_n S_{n+1})^{-1} R_n \quad (4.27).$$

Mit den Gleichungen (4.26) und (4.27) können die Matrizen S_n beginnend mit $n=N$ sukzessive bis $n=1$ berechnet werden. Für $n=0$ ergibt sich schließlich ein homogenes Gleichungssystem für die Komponenten von c_0 :

$$(P_0 S_1 + Q_0) c_0 = 0 \quad (4.28).$$

Wie man anhand der Form der Matrizen P_0 und Q_0 erkennen kann (siehe Anhang B), verschwindet die Determinante in (4.28). Zusammen mit der aus der Normierungsbedingung resultierenden Komponente (4.19) wird der Vektor c_0 durch (4.28) eindeutig bestimmt. Durch Hochiteration in (4.25), beginnend bei c_0 , erhält man schließlich die zur Angabe der Verteilungsfunktion erforderlichen Entwicklungskoeffizienten höherer Ordnung.

Dabei ist darauf zu achten, daß man die Entwicklungskoeffizienten c_n nur bis zu einer Ordnung n berechnet, die wesentlich kleiner ist, als der anfangs festgelegte Abschneidewert $n=N$, da andernfalls die Konvergenz des Verfahrens nicht mehr gewährleistet ist. Wie sich zeigt, liegt dieser Wert in der Größenordnung $n \approx \frac{1}{4}N$.

Da zur Berechnung von S_n in (4.27) vielfache Matrixinvertierungen erforderlich sind, ist die numerisch erreichbare Genauigkeit der Ergebnisse vor allem von der Konditionierung der Matrizen abhängig.

Bekanntermaßen ergeben sich bei der Invertierung einer schlecht konditionierter Matrix erhebliche Rundungsfehler [42]. Um die Konditionierung der Matrizen zu beeinflussen wurde der frei wählbare Skalierungsparameter α in (4.15) eingeführt. Zur numerischen Berechnung

wurde das bekannte Gauß'sche Eliminationsverfahren verwendet [43]. Die erzielten Resultate werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

4.4 ERGEBNISSE

Im folgenden werden die mit Hilfe des geschilderten Matrix-Kettenbruch-Verfahrens erzielten Lösungen der stationären Fokker-Planck-Gleichung vorgestellt [44].

Zu deren Berechnung wurden die Materialparameter von CuCl als Beispiel für einen Zwei-Photonen-Absorptionsprozeß zur Erzeugung von Exzitonenmolekülen verwendet, sowie eine Resonatorlänge $L=1\mu$ angenommen. Bei der Wahl der Werte für die skalierten Parameter $\kappa=0.577$, $\omega''=0.164$ und $\Delta=-12.064$ (4.29) wurden die Bedingungen für das Auftreten der optischen Bistabilität berücksichtigt. Diese lassen sich aus der deterministischen Gleichung für das elektrische Feld (4.6) ermitteln. Im stationären Fall ergibt sich mit (4.12) für die skalierten Größen $\kappa^2 \epsilon_i^2 = x[(\Delta+x)^2 + (\kappa+\omega''x)^2]$ (4.30). Bistabiles Verhalten tritt genau dann auf, wenn $\kappa^2 \epsilon_i^2$ als Funktion von x zwei Extrema besitzt. Dies ist bei einer Resonatorverstimmung $\Delta < 0$ und $|\Delta| > \kappa\omega''$ (4.31) gegeben. Damit wird deutlich, daß die optische Bistabilität einer Zwei-Photonen-Absorption vor allem dispersiven Charakter hat.

Unter Verwendung der Größen (4.29) wurden die Gleichungen für die Koeffizienten c_n^β (4.24) mit den Abschneidewerten $N=500$, $B=12$ und dem Skalierungsparameter $\alpha=2.0$ numerisch gelöst. Mit deren Kenntnis kann das erste Moment der Intensität über

$$\langle x \rangle = \alpha(c_0^0 - c_1^0) \quad (4.32)$$

sofort angegeben werden.

In Abb.6 wird die resultierende gemittelte Intensität $\tilde{I} = \langle x \rangle$ (gestrichelte Linie) mit der Lösung der deterministischen, mittleren Feldintensität $\tilde{I}_{mf} = x$ in (4.30) (durchgezogene Linie) verglichen. Die normierte Intensität des einfallenden Lichtfeldes wird mit $I_i = \epsilon_i^2$ be-

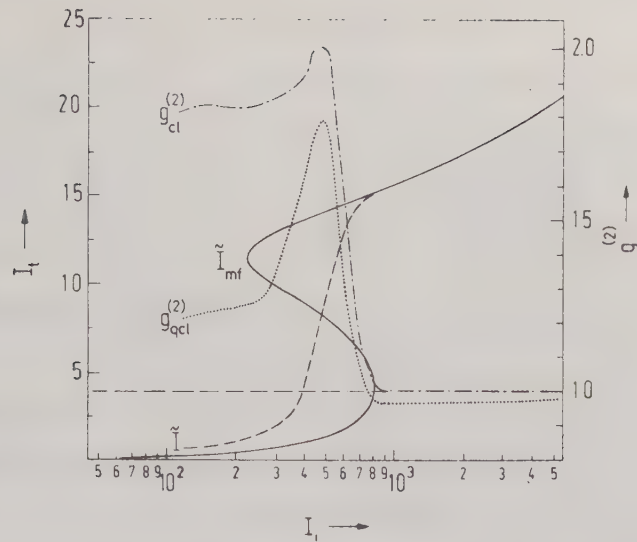


Abbildung 6.: Mittlere Intensität I und Intensitäts-Korrelations-Funktion $g^{(2)}$ als Funktion der Intensität des einfallenden Lichtfeldes I_i .

$\tilde{I}_{mf}$ (—) bezeichnet die Lösung der deterministischen, mittleren Feldgleichung (4.30). $\tilde{I}$ gibt die gemittelte Intensität (---) bezüglich (4.32) an.

$g_{cl}^{(2)}$ und $g_{qcl}^{(2)}$ sind die klassischen und die quasiklassischen Intensitäts-Korrelationsfunktionen, die in Kap.4.5 angegeben sind.

zeichnet. (Die ebenfalls in Abb.6 aufgetragenen Intensitätskorrelationsfunktionen $g_{cl}^{(2)}$ und $g_{qcl}^{(2)}$ werden in Kap.4.5 diskutiert.)

Wie man erkennt, unterscheiden sich die Eingangs-Ausgangs-Charakteristiken beider Kurven vor allem im bistabilen Bereich. Bezüglich der deterministischen Kurve ergibt sich aus der stationären Lösung der Fokker-Planck-Gleichung eine Art Maxwell-Konstruktion, wie sie bei Gleichgewichtsphasenübergängen erster Ordnung auftritt. Für den Übergang zwischen den Zuständen niedriger und hoher Transmission bietet sich daher ein Vergleich mit den Van der Waals Kurven an, die den Phasenübergang flüssig-gasförmig beschreiben [45].

Die Punkte der deterministischen Lösung, die auf dem Teil der Kurve mit negativer Steigung liegen, sind instabil. Sie entsprechen einer negativen Kompressibilität in den Van der Waals Kurven. Auf die optische Bistabilität bezogen würde in diesem Bereich eine Abnahme der Intensität des einfallenden Lichtfeldes zu einer Zunahme der transmittierten Intensität führen, was natürlich nicht möglich ist.

Neben diesem Plausibilitätsargument läßt sich die Instabilität dieser Lösungen auch durch eine Stabilitätsanalyse (Hurwitz-Kriterium [4]) nachweisen, wie sie in Kap.5 durchgeführt wird.

Während die deterministische Kurve im bistabilen Bereich demnach zwei stabile Lösungen besitzt, ergibt sich durch die statistische Beschreibung über die Maxwell-Konstruktion ein eindeutiger Zusammenhang zwischen der gemittelten und der einfallenden Intensität. Durch die Berücksichtigung der Fluktuationen entscheidet sich damit, welchen Zustand das System tatsächlich annimmt.

Im unteren Transmissionsast ist der Einfluß der relativ großen Rauschstärke deutlich zu erkennen. Der Verlauf der gestrichelten Kurve ist natürlich von dieser Rauschstärke abhängig. So nimmt deren Steigung im Übergangsgebiet mit kleineren Rauschstärken zu. Verbunden damit findet der Sprung in den oberen Transmissionsast erst bei größeren Eingangsentensitäten statt [46]. Neben dem ersten Moment der Intensität wurde die entsprechende stationäre Verteilungsfunktion des komplexen elektrischen Feldes über (4.16) berechnet. Diese ist für drei verschiedene Werte der Eingangsintensität I_1 in Abb.7 angegeben. Im ersten Bild (Abb.7a) ist nur der untere Transmissionszustand realisiert. In diesem Bereich läßt sich die Verteilungsfunktion durch die Lösungen der linearisierten Fokker-Planck-Gleichung gut approximieren.

Im stationären Fall erhält man durch linearisieren von (4.13) eine verschobene Gauß-Verteilung:

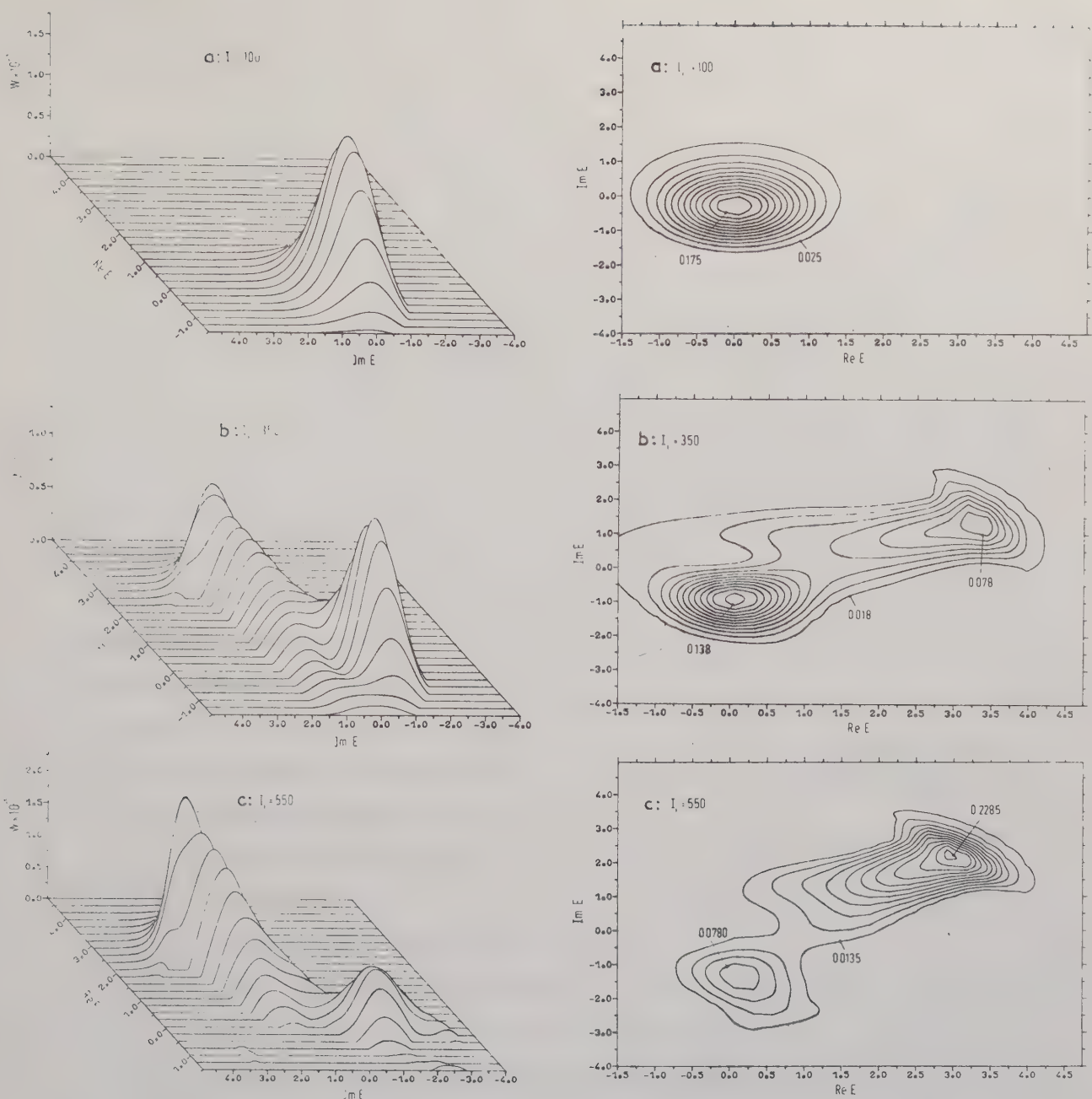


Abbildung 7. : Stationäre Verteilungsfunktion $W(x, \phi)$ des komplexen elektrischen Feldes für drei verschiedene Werte der Intensität des einfallenden Lichtfeldes ($a: I_i = 100$, $b: I_i = 350$ und $c: I_i = 550$). Daneben sind die entsprechenden Höhenlinienbilder in der komplexen Ebene des elektrischen Feldes dargestellt. Die Höhenlinien sind äquidistant.

$$W_L(x, \phi) = N \exp. \left\{ - 2\kappa \left[\left(\sqrt{x} \cos \phi - \frac{\kappa^2 \varepsilon_i}{\kappa^2 + \Delta^2} \right)^2 + \left(\sqrt{x} \sin \phi - \frac{\kappa \Delta \varepsilon_i}{\kappa^2 + \Delta^2} \right)^2 \right] \right\} \quad (4.33)$$

wobei N eine Normierungskonstante ist.

In Abb.7b wurde mit der Eingangsintensität $I_i=350$ ein Wert aus dem Übergangsbereich zwischen niedriger und hoher Transmission gewählt (vgl. Abb.6). Die Verteilungsfunktion kann hier nur über die numerische Lösung der vollen, nichtlinearen Fokker-Planck-Gleichung angegeben werden. Wie man sieht, besitzt die Verteilungsfunktion zwei ausgeprägte Maxima. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System im unteren Transmissionszustand befindet, ist weiterhin am größten. Das Maximum für den Zustand hoher Transmission hat sich aber bereits deutlich entwickelt. Bei dem Wert $I_i=550$ (Abb.7c) dominiert schließlich der hohe gegenüber dem niedrigen Transmissionszustand.

In den Abbildungen 7b und 7c sind kleine Unebenheiten in der Verteilungsfunktion zu erkennen, die auf die verbliebenen numerischen Ungenauigkeiten zurückzuführen sind.

Um einen genaueren quantitativen Eindruck von der Größe der auftretenden Maxima zu gewinnen, sind neben den Verteilungsfunktionen auch die entsprechenden Höhenlinienbilder in Abb.7a-c angegeben.

Im bistabilen Bereich gibt die relative Höhe der beiden Maxima Auskunft über die Stabilität der Zustände niedriger und hoher Transmission. Während der Zustand mit der größten Wahrscheinlichkeit absolut stabil ist, bezeichnet man den Zustand mit der geringeren Wahrscheinlichkeit als metastabil [47]. Wie man sieht, wird diese Zuordnung auf die Zustände niedriger und hoher Transmission beim Übergang von Abb.7b nach Abb.7c gerade vertauscht.

4.5 UNTERSUCHUNGEN ZUR PHOTONENSTATISTIK

Die Wechselwirkung zwischen Licht und Materie führt bekanntlich zu Änderungen in der Photonenzahl des Lichtfeldes. Diese werden im folgenden anhand des bisher diskutierten Beispiels der optischen Bistabilität einer Zwei-Photonen-Absorption im stationären Fall untersucht. Dabei ist die Frage nach der Möglichkeit des Auftretens eines Lichtfeldes mit antikorrelierten Photonen [48] von besonderem Interesse. Obwohl dieses, im Rahmen der Quantenoptik zuerst von Glauber [49] theoretisch postulierte Lichtfeld reinen Quantencharakter besitzt [50], lassen sich auch innerhalb der bisher durchgeführten klassisch-statistischen Beschreibung Aussagen dazu machen.

Die statistischen Eigenschaften eines Lichtfeldes werden nach Glauber mit Hilfe von Korrelationsfunktionen der Form:

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_n, \dots, x_1) = \langle E^{(-)}(x_1) \dots E^{(-)}(x_n) E^{(+)}(x_n) \dots E^{(+)}(x_1) \rangle \quad (4.34)$$

beschrieben. Diese Funktionen geben die Korrelation der Lichtquanten des elektrischen Feldes zu verschiedenen Raum-Zeit-Punkten x_n mit $n=1,2,\dots$ an. $E^{(-)}$, $E^{(+)}$ sind die Operatoren des elektrischen Feldes. Die Mittelung ist eine Ensemblemittelung, die in der Quantenmechanik mit Hilfe der Dichtematrix durchgeführt wird.

Die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung liefert Informationen über die Intensitätskorrelationen des Lichtfeldes. Damit läßt sich das mittlere Schwankungsquadrat der Intensität bzw. der Photonenzahl berechnen.

Zur Klassifikation der Lichtfelder wird die normierte Korrelationsfunktion

$$g^{(2)} = \frac{G^{(2)}}{\{G^{(1)}\}^2} = \frac{\langle E^{(-)} E^{(-)} E^{(+)} E^{(+)} \rangle}{\langle E^{(-)} E^{(+)} \rangle^2} \quad (4.35)$$

im Grenzfall gleicher Raum-Zeit-Punkte eingeführt. Danach unterscheidet man zwischen drei Fällen:

I) $g^{(2)} > 1$

II) $g^{(2)} = 1$

III) $g^{(2)} < 1$

Der erste Fall ist bei thermischem Licht realisiert. Seit der Entdeckung des Hanbury-Brown und Twiss-Effektes [51] ist bekannt, daß thermisches Licht starke Photonenkorrelationseffekte (Clusterbildungen) zeigt, die zu großen Schwankungen in der Photonenzahl führen. $g^{(2)}$ ist damit größer als Eins. Die zugehörige Photonenverteilungsfunktion ist durch die Bose-Einstein-Verteilung gegeben.

In dem kohärenten Lichtfeld des Lasers werden die Korrelationen durch die Zahl der zufälligen Koinzidenzen bestimmt. Die Photonen verhalten sich wie unabhängige Teilchen. In diesem Fall ist das mittlere Schwankungsquadrat gerade gleich der mittleren Photonenzahl, d.h. $g^{(2)} = 1$. Die Verteilungsfunktion ist eine Poisson-Verteilung.

Bei einem Lichtfeld mit antikorrelierten Photonen dagegen, liegen die Korrelationen noch unterhalb der Zahl der zufälligen Koinzidenzen. Ein Antikorrelationseffekt mit $g^{(2)} < 1$ tritt auf, der zu einer engeren Poisson-Verteilung führt. Im Idealfall würde sich eine Deltafunktion ergeben. Durch den Vergleich mit den statistischen Eigenschaften des thermischen Lichtfeldes wird der Antikorrelationseffekt in der Literatur auch mit negativer Hanbury-Brown-Twiss-Effekt und Photonennichtbündelungseffekt (photon-antibunching) bezeichnet.

Die experimentelle Realisierung von Lichtfeldern mit antikorrelierten Photonen ist bis heute nur mit Hilfe der Resonanzfluoreszenzmethode gelungen [52]. In diesem Experiment wurden einzelne Natriumatome durch das kohärente Lichtfeld eines Lasers angeregt und dabei so präpariert, daß für die angeregten Natriumatome nur ein erlaubter Übergang in ein anderes Ni-

veau besteht (Zwei-Niveau-System). Das durch diesen Übergang entstehende Fluoreszenzlicht zeigt den Antikorrelationseffekt. Die Erklärung ist einfach: Da zwischen zwei aufeinanderfolgenden Emissionsakten von Photonen eine mittlere Wartezeit vergeht, bis das Atom erneut angeregt ist, ist die Korrelation der Photonen sehr gering und damit $g^{(2)} < 1$. Die so erzielte Abfolge einzelner Photonen gibt allerdings noch keinen eindeutigen Hinweis auf die Existenz eines ganzen Lichtfeldes mit antikorrelierten Photonen. Dazu müßten die Photonen eines vorgegebenen Lichtfeldes durch einen geeigneten Prozeß so umgeordnet werden, daß das verbleibende Lichtfeld die entsprechenden statistischen Eigenschaften ($g^{(2)} < 1$) aufweist.

Dies ist nach theoretischen Vorhersagen über die Wechselwirkung des Lichtfeldes mit einem optisch nichtlinearen Medium möglich [53-58]. Ausgehend von dem kohärenten Lichtfeld des Lasers ($g^{(2)} = 1$) führen die optisch nichtlinearen Prozesse dazu, daß besonders hohe, zufällige Intensitätsfluktuationen abgebaut werden, und damit das mittlere Schwankungsquadrat der Photonenzahl vermindert wird ($g^{(2)} < 1$).

Die Vorschläge beziehen sich dabei auf die Verwendung eines optischen parametrischen Verstärkers, der Zwei- und Mehrphotonenabsorption, der Erzeugung der zweiten Harmonischen, bis hin zur optischen Bistabilität. Die Schwierigkeiten, die bis heute eine experimentelle Realisierung verhindern, liegen u.a. darin, daß die Messung von Antikorrelationseffekten extrem intensitätsstabilisiertes Laserlicht erfordert. So wurde beispielsweise der Einfluß von externem Rauschen auf die Intensitätskorrelation in einem entarteten optischen parametrischen Verstärker quantenmechanisch berechnet [59]. Unter Verwendung der Materialparameter des nichtlinearen Kristalls $\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$ ergab sich, daß Lichtfelder mit antikorrelierten Photonen nur dann auftreten können, wenn die relativen Intensitätsfluktuationen des Pump-Lasers $\Delta I_p / I_p$ kleiner als 2.5×10^{-3} sind. Dieses Ergebnis konnte durch andere Arbeiten, in denen ähnliche Resultate erzielt wurden [60], bestätigt werden.

Bei der optischen Bistabilität erwartet man einen Antikorrelationseffekt im oberen Transmissionsast. Dies wurde zuerst von Drummond und Walls [61] für eine rein dispersive Bistabilität vorhergesagt. Da die Intensität des transmittierten Lichtfeldes in diesem Bereich nicht mehr stark von der Intensität des einfallenden Lichtfeldes abhängt, werden die Schwankungen der Eingangsintensität nur zu einem Teil auf das transmittierte Lichtfeld übertragen, so daß die normierte Korrelationsfunktion $g^{(2)} < 1$ wird.

Um dies im Falle der optischen Bistabilität einer Zwei-Photonen-Absorption zu untersuchen, wird neben dem ersten (4.32), auch das zweite Moment der Intensität über die Vektorkoeffizienten c_n^{β} (4.24) berechnet.

Man erhält

$$\langle I^2 \rangle = 2\alpha^2 (c_0^0 - 2c_1^0 + c_2^0) \quad (4.36).$$

Um einen Zusammenhang zwischen der bisher durchgeführten klassisch-statistischen Beschreibung der optischen Bistabilität und der quantenmechanischen Formulierung der Glauberschen Korrelationsfunktionen (4.34) herzustellen, wird die in (4.34) auftretende Mittelung über die Dichtematrix durch die in (4.32) und (4.36) durchgeführte Mittelung über die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung (4.16) ersetzt. Dabei werden die Operatoren des elektrischen Feldes in (4.34) als komplexe Zahlen aufgefaßt.

Die klassische Form der normierten Korrelationsfunktion (4.35) lautet damit

$$g_{cl}^{(2)} = \frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} \quad (4.37).$$

Berücksichtigt man allerdings, daß die in (4.34) angegebenen Größen des elektrischen Feldes Operatoren sind, die den Bose-Vertauschungsrelationen genügen, erhält man

$$g_{qcl}^{(2)} = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I \rangle^2} \quad (4.38).$$

Da die klassisch berechneten Momente der Intensität (4.32) und (4.36) in diese quantenmechanische Form eingesetzt werden, wird (4.38) als quasiklassische Korrelationsfunktion bezeichnet.

Beide Korrelationsfunktionen (4.37) und (4.38) sind in der im letzten Abschnitt angegebenen Abbildung (Abb.6) dargestellt. Wie man sieht, ist die quasiklassische Form der Korrelationsfunktion im oberen Transmissionsast tatsächlich kleiner als Eins. Im Zustand hoher Transmission wird der auf die Intensität des einfallenden Lichtfeldes bezogene relative Rauschfaktor vernachlässigbar klein, so daß trotz der erheblichen absoluten Rauschstärke ein Antikorrelationseffekt auftritt.

Da im bistabilen Bereich sowohl der Zustand niedriger als auch der Zustand hoher Transmission mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit realisiert ist, ergeben sich durch die Konkurrenz dieser beiden Zustände besonders hohe Korrelationen, die in der klassischen und der quasiklassischen Korrelationsfunktion deutlich zu erkennen sind.

5. OPTISCHE BISTABILITÄT BEI EIN-PHOTONEN-ÜBERGÄNGEN -ZEITABHÄNGIGE LÖSUNGEN DER DETERMINISTISCHEN UND DER STOCHASTISCHEN GLEICHUNGEN-

Nach der Berechnung der stationären Lösungen, werden in diesem Kapitel die zeitabhängigen Phänomene bei der optischen Bistabilität untersucht.

Dabei steht die Frage nach dem möglichen Auftreten von periodischen und chaotischen Lösungen im Vordergrund des Interesses.

In einer kurzen Einführung in die nichtlineare Dynamik dissipativer Systeme wird zunächst der Begriff deterministisches Chaos erläutert und, anhand des Beispiels der Logistischen Gleichung ein universelles Verhalten auf dem Weg zum Chaos, das Feigenbaumszenarium, vorgestellt (Kap.5.1).

Im Anschluß daran wird das periodische und chaotische Verhalten der zeitabhängigen Lösungen bei der optischen Bistabilität mit Hilfe der Maxwell-Bloch-Gleichungen untersucht (Kap.5.2). Zum Nachweis des Feigenbaumszenariums wird dabei, für die Intensität des elektrischen Feldes, eine eindimensionale Abbildung konstruiert.

Im letzten Abschnitt wird schließlich das Zusammenspiel von deterministischem Chaos und den vorgegebenen Fluktuationen mit Hilfe einer numerischen Simulationsmethode behandelt (Kap.5.3).

5.1 NICHTLINEARE DYNAMIK DISSIPATIVER SYSTEME

5.1.1 DETERMINISTISCHES CHAOS

Der Begriff deterministisches Chaos ist in den letzten Jahren in den verschiedensten wissenschaftlichen Gebieten, wie Physik, Biologie, Chemie usw. immer mehr in den Vordergrund des Interesses gerückt.

Es waren hauptsächlich zwei Ereignisse, die dieses Interesse weckten.

Zum einen der von Lorenz [62] gefundene "seltsame" Attraktor, bei dem ein System von nur drei gekoppelten, deterministischen Differentialgleichungen erster Ordnung chaotisches Verhalten zeigt. Zum anderen die Entdeckung von Feigenbaum [63], daß die Entwicklung dieser chaotischen Strukturen in völlig unterschiedlichen dynamischen Systemen quantitativ gleich, universell, verläuft.

Die bisherigen Untersuchungen haben gezeigt, daß das Auftreten von deterministischem Chaos, d.h. Chaos, das aus der Berechnung deterministischer Gleichungen resultiert, immer mehr zu einer typischen, sogenannten generischen Eigenschaft [64] deterministischer Systeme wird.

Zunächst muß die Frage nach der Definition von Chaos bzw. chaotischem Verhalten beantwortet werden.

Betrachtet man dazu das zeitliche Verhalten einer Größe $x(t)$, wie es in Abb.8 skizziert ist. Anschaulich liegt demnach ein chaotisches Verhalten vor, wenn man einen solchen oder ähnlichen unregelmäßigen Kurvenverlauf beobachtet. Zur weiteren Analyse dient auch die Berechnung des Fourierspektrums oder der Autokorrelationsfunktion der Größe $x(t)$. Bei chaotischem Verhalten ergibt sich aus dem Fourierspektrum ein nahezu weißes Rauschen. Die Autokorrelationsfunktion fällt exponentiell ab.

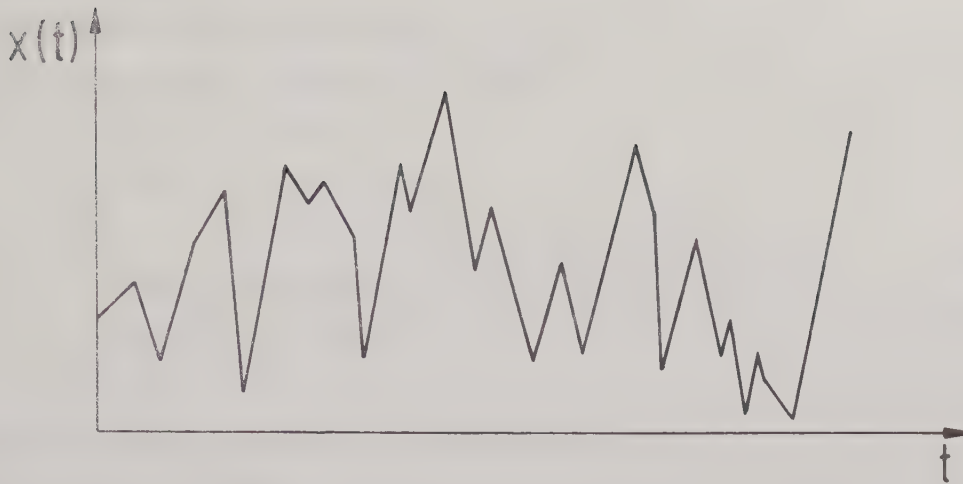


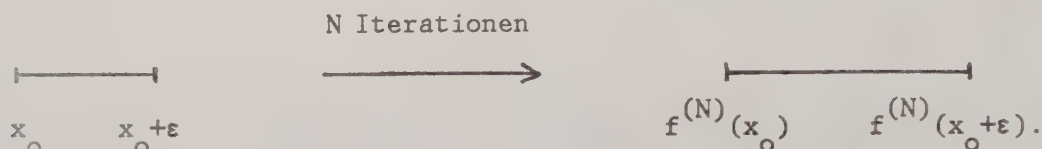
Abbildung 8. : Beispiel für irreguläres, aperiodisches Verhalten einer Größe $x(t)$ als Funktion der Zeit t .

Eine Abhängigkeit der Größe x zwischen zwei verschiedenen Zeiten besteht damit nicht mehr. Der Zeitablauf von $x(t)$ ist praktisch unvorhersagbar.

Um den Begriff Chaos quantitativ beschreiben zu können, müssen die Ursachen für das Auftreten chaotischen Verhaltens untersucht werden.

Bekannt ist, daß bei linearen Systemen ähnlich gewählte Anfangsbedingungen zu ähnlichen Konsequenzen führen. Bei nichtlinearen Systemen dagegen besteht oftmals eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Diese führt dazu, daß benachbarte Punkte im Phasenraum mit der Zeit makroskopisch separiert werden und damit ein chaotisches Verhalten auslösen. Die Frage, ob eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen besteht, wird durch die Berechnung des Liapunov-Exponenten beantwortet. Dies wird zunächst am Beispiel einer diskreten Abbildung verdeutlicht.

Sei die Abbildung $x_{n+1} = f(x_n)$ (5.1) gegeben. Wählt man einen Anfangspunkt x_0 , sowie einen benachbarten Wert $x_0 + \varepsilon$, muß demnach untersucht werden, wie sich der Abstand dieser beiden Punkte nach N Iterationen in (5.1) entwickelt hat, d.h.:



Nach N Iterationen wird der Anfangspunkt x_0 auf die N -te Iterierte $f^{(N)}(x_0)$ bzw. der Wert $x_0 + \varepsilon$ auf die N -te Iterierte $f^{(N)}(x_0 + \varepsilon)$ abgebildet.

Deren Abstand wird über

$|f^{(N)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(N)}(x_0)| := \varepsilon e^{N\lambda}$ (5.2) definiert. Läßt man die Differenz der beiden Anfangswerte gegen Null gehen, ergibt sich

$$e^{N\lambda} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|f^{(N)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(N)}(x_0)|}{\varepsilon} = \left| \frac{df^{(N)}(x_0)}{dx_0} \right| \quad (5.3).$$

Die Ableitung der N -ten Iterierten nach x_0 kann über die Beziehungen $f^{(n)}(x_0) = f^{(1)}(x_{n-1})$ bzw. $f^{(n)}(x_0) = x_n$ mit $n=1, 2, \dots, N$ in ein Produkt von Ableitungen der ersten Iterierten umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{df^{(N)}(x_0)}{dx_0} &= \frac{df^{(N)}(f^{(N-1)}(\dots(f^{(1)}(x_0)))}{dx_0} \\ &= \frac{df^{(N)}}{df^{(N-1)}} \frac{df^{(N-1)}}{df^{(N-2)}} \dots \frac{df^{(1)}(x_0)}{dx_0} = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{df(x_i)}{dx_i} \quad (5.4). \end{aligned}$$

Damit erhält man aus (5.3) und (5.4) im Grenzfall unendlich vieler Iterationen den folgenden Ausdruck für den sogenannten Liapunov-Exponenten [65]

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right| \quad (5.5).$$

Falls der Liapunov-Exponent (5.5) größer als Null wird, ist die Phasenbahn instabil und chaotisch. Wie man anhand der Definition (5.2) deutlich erkennen kann, werden in diesem Falle zwei eng benachbarte Anfangswerte nach N Iterationen makroskopisch separiert. Eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen liegt vor.

(Man findet auch quasi-chaotisches Verhalten in Systemen, die keinen positiven Liapunov-Exponenten besitzen [66], auf die aber in diesem Zusammenhang nicht näher eingegangen wird.)

Für kontinuierliche Systeme wird die Definition des Liapunov-Exponenten entsprechend übertragen. Hier lassen sich viele nichtlineare Gleichungen in der Form $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ mit $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (5.6) darstellen.

Das Gleichungssystem (5.6) besteht aus autonomen, d.h. nicht explizit zeitabhängigen, nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Es beschreibt einen Fluß im n -dimensionalen Phasenraum, der durch das Geschwindigkeitsvektorfeld $\dot{\vec{x}}$ definiert ist. Die Richtung der Bewegung wird durch diesen Vektor bestimmt. Der Vektor $\vec{x}$, auch Phase genannt, gibt den Zustand des Systems an. Die zeitabhängige Lösung $\vec{x}(t)$ ergibt sich durch Integration bei gegebenem Anfangszustand $\vec{x}_0$ zur Zeit $t=0$. Diese liefert eine Bahnkurve (Trajektorie) im n -dimensionalen Phasenraum Γ , wie sie in Abb.9 beispielhaft skizziert ist.

Der stationäre Punkt des Flußes wird als Fixpunkt bezeichnet.

Die Liapunov-Exponenten λ charakterisieren im kontinuierlichen Fall die Ausdehnungsraten in der Umgebung des Fixpunktes und sind als die Eigenwerte der Stabilitätsanalyse für diesen Fixpunkt definiert. Mit

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_{st} + \delta\vec{x}(t) \quad (5.7)$$

wird der stationäre Wert der Größe $\vec{x}(t)$ um einen infinitesimalen Vektor $\delta\vec{x}(t)$ ausgelenkt. Die zeitliche Entwicklung dieser Störung wird über den Liapunov-Exponenten mit

$$\delta x_i(t) = e^{\lambda_i t} \delta x_i(0) \quad (5.8)$$

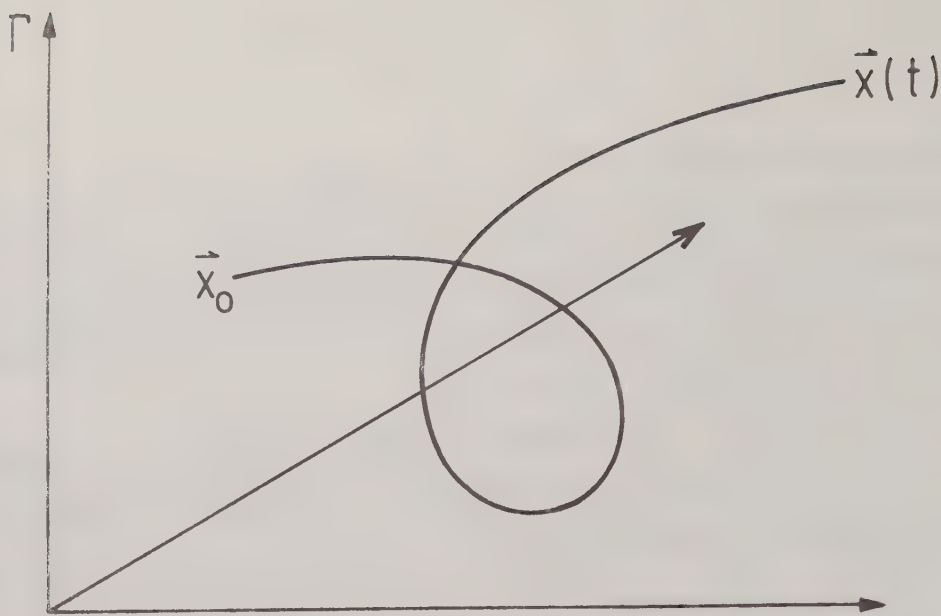


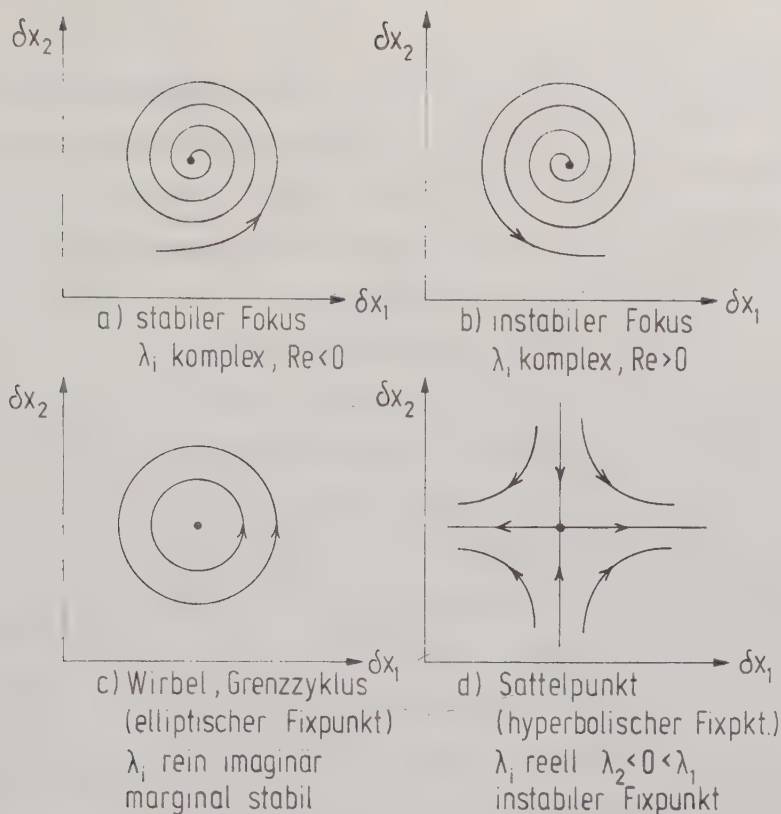
Abbildung 9. : Trajektorie im Phasenraum Γ . $\vec{x}_0$ bezeichnet den Anfangszustand zur Zeit $t=0$. $\vec{x}(t)$ gibt den Zustand zur Zeit t an.

berechnet. Die Vorzeichen der im allgemeinen komplexen Werte λ_i geben Auskunft über die Stabilität des jeweiligen Fixpunktes. Beispielfhaft für $n=2$ sind in Abb.10a-10d verschiedene Möglichkeiten im Phasenraumdiagramm angegeben.

Während im ersten Bild (Abb.10a) die Störung $\delta\vec{x}(t)$ unter der Zeitentwicklung abklingt und der Fixpunkt wieder erreicht wird, verläßt die Trajektorie in Abb.10b den hier instabilen Fixpunkt.

Bei rein imaginären Eigenwerten (Abb.10c) erhält man einen Wirbel, der auch als Grenzyklus bezeichnet wird. Dieser ist marginal stabil in dem Sinne, daß alle Trajektorien in der Umgebung des Fixpunktes für alle Zeiten in seiner Umgebung bleiben.

Schließlich ist in Abb.10d ein Beispiel angegeben, in dem die Vorzeichen der beiden reellen Eigenwerte verschieden sind. In diesem Fall entsteht eine Konkurrenz zwischen den Ausdehnungs- bzw. Schrumpfraten der Freiheitsgrade. Dieser Konkurrenzmechanismus führt zu einer unregelmä-



Abbildungung 10. : Trajektorien im zweidimensionalen Phasenraum für verschiedene Werte der Liapunov-Exponenten.

ßigen Phasenbahn, bzw. zu einem wirren Verhalten von $\vec{x}(t)$ als Funktion der Zeit.

Bei dissipativen Systemen, also Nichtgleichgewichtssystemen mit Energieabsorption, kommt hinzu, daß der Fluß im Phasenraum kontrahierend ist, d.h. $dV/dt < 0$. Betrachtet man demnach ein Phasenraumvolumenelement ΔV , so wird dieses Volumenelement unter der Zeitentwicklung asymptotisch auf einen Unterraum des Phasenraumes abgebildet. Diesen Unterraum bezeichnet man als Attraktor. Er spielt in der Theorie nichtlinearer dissipativer Systeme eine wichtige Rolle. Bisher wurde bereits ein Null-dimensionaler Attraktor, der Fixpunkt, sowie ein periodischer Attraktor der Dimension Eins, der marginal stabile Grenzzyklus, vorgestellt.

Obwohl das Phasenraumvolumen unter der Zeitentwicklung kontrahiert wird, müssen die einzelnen Längen nicht alle notwendig kontrahiert werden. Das bedeutet, daß zwar die Summe der Liapunov-Exponenten negativ ist, daß aber einzelne Exponenten durchaus positive Werte annehmen können. Dies ist die Ausgangssituation für chaotisches Verhalten.

Der anfangs erwähnte seltsame Attraktor (strange attractor) beschreibt solch ein chaotisches Verhalten. Er zeichnet sich durch eine komplizierte Phasenraumbahnstruktur mit unendlich vielen Schichten aus.

Um chaotisches Verhalten nachweisen zu können ist bei der theoretischen Beschreibung neben der Nichtlinearität der Gleichungen und dem Vorliegen stetig differenzierbarer Funktionen in (5.6) die Berücksichtigung von mindestens drei Freiheitsgraden, d.h. $n \geq 3$, erforderlich. Diese wichtige Voraussetzung konnte von Ruelle bewiesen werden [67].

Während bei zwei Freiheitsgraden nach dem Poicaré-Bendixon-Theorem [68] nur Fixpunkte oder Grenzyklen als Attraktoren auftreten können, zeigte Ruelle, daß die Menge der seltsamen Attraktoren, die chaotisches Verhalten charakterisieren, für Dimensionen größer als zwei generisch ist. Für Einzelheiten dieses Beweises sei auf die Literatur verwiesen [67].

Damit läßt sich für die seltsamen Attraktoren eine weitere Eigenschaft ableiten. Sie besitzen eine fraktale Dimension, die sogenannte Hausdorff-Dimension [69]. Betrachtet man dazu das bekannteste Beispiel für einen seltsamen Attraktor, den sogenannten Lorenz-Attraktor [62]. Zur Beschreibung der Rayleigh-Benard-Instabilitäten [70] entwickelte Lorenz aus den hydrodynamischen Gleichungen ein nichtlineares Gleichungssystem der Form (5.6) mit genau drei Freiheitsgraden. Da ein dissipatives System vorliegt, nimmt die Dimension des Phasenraumvolumens ab. Das Poicaré-Bendixon-Theorem schließt allerdings für den gefundenen Lorenz-Attraktor die Dimension zwei aus, so daß er nur eine fraktale Dimension aufweisen kann. Der Attraktor hat eine höhere Dimension als eine Fläche ($D=2$) und eine geringere als ein Raum ($D=3$). Solche

gebrochen-dimensionalen Strukturen sind charakteristisch für chaotisches Verhalten deterministischer Systeme.

Der zweite, anfangs erwähnte, wichtige Meilenstein bei der Behandlung chaotischer Systeme bezieht sich auf die Frage nach der Entstehung von Chaos. Feigenbaum konnte ein universelles Verhalten für eine ganze Klasse von Systemen auf dem Weg zum Chaos nachweisen. Dieses sogenannte Feigenbaumszenarium ist dadurch charakterisiert, daß das System von einem stabilen Zustand durch geeignete Änderung der vorhandenen Parameter zu einem oszillatorischen Zustand, d.h. zu einem Grenzyklus, übergeht. Der oszillatorische Zustand führt schließlich bei weiterer Variation der Parameter über eine Kaskade von Periodenverdopplungen (Bifurkationen) zu einer unendlichen Periode und damit zum Chaos.

Dies wird im folgenden Abschnitt anhand der Logistischen Gleichung verdeutlicht. Zuvor sei darauf hingewiesen, daß neben dem Feigenbaumszenarium noch zwei weitere sogenannte Universalitätsklassen bekannt sind: das Ruelle-Takens-Newhouse-Szenarium und das Pomeau-Manneville-Szenarium [62,71].

Da, wie sich zeigen wird (Kap.5.2), der Weg zum Chaos bei der optischen Bistabilität über das Feigenbaumszenarium verläuft, wird auf die Beschreibung der beiden anderen Szenarien verzichtet. Diese sind in der vorliegenden umfangreichen Literatur zum Thema Chaos dargestellt [62,71-77].

5.1.2 DAS FEIGENBAUMSZENARIO

AM BEISPIEL DER LOGISTISCHEN GLEICHUNG

Die Logistische Gleichung ist ein Beispiel für eine diskrete Abbildung, wie sie in (5.1) in allgemeiner Form angegeben wurde. Sie lautet

$$x_{n+1} = 1 - \mu x_n^2 \quad (5.9),$$

wobei der Parameter μ im Intervall $0 \leq \mu \leq 2$ definiert ist. Gleichung (5.9) ist die einfachste nichtlineare, eindimensionale, einparametrische Abbildung. Die Funktion $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$ (5.10) ist in Abb.11 für den Definitionsbereich $x \in [-1,1]$ (5.11), der im folgenden ausschließlich betrachtet wird, und dem Parameterwert $\mu=1$ dargestellt.

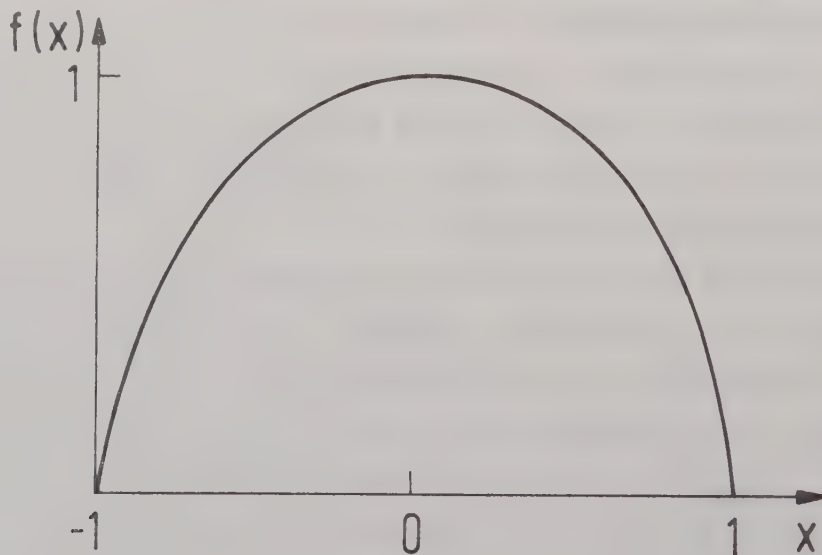


Abbildung 11. : Die Logistische Gleichung (5.10) für $x \in [-1,1]$ und $\mu=1$.

Wie sich gezeigt hat [63], reicht die Beschränkung auf das Beispiel (5.9) mit einem einfachen quadratischen Maximum völlig aus, um das gesamte Spek-

trum der Möglichkeiten, die sich im Hinblick auf das chaotische Verhalten bei ein- und mehrparametrischen Abbildungen ergeben können, zu untersuchen. Im folgenden werden allerdings nur die Aspekte diskutiert, die im Zusammenhang mit der Untersuchung von deterministischem Chaos bei der optischen Bistabilität in Kap.5.2 und Kap.5.3 behandelt werden.

Wählt man in der Logistischen Gleichung (5.9) bei festem Parameterwert $\mu = \tilde{\mu}$ einen Anfangswert x_0 , so ergibt sich durch Iteration eine Folge von Punkten. Diese wird als Bahn $\vec{x}_{0,\tilde{\mu}}$ mit

$$\vec{x}_{0,\tilde{\mu}} = (x_0, x_1, x_2, \dots) \quad (5.12)$$

bezeichnet. Gilt $x_{n+p} = x_n$ für ein p und alle n , nennt man die Bahn periodisch. Das kleinste p mit dieser Eigenschaft wird als die Periode p der Bahn bezeichnet. Ein Fixpunkt ist demnach eine Bahn der Periode Eins. Umgekehrt ist jeder Punkt einer Bahn der Periode p ein Fixpunkt von $f^{(p)}$, der p -fach iterierten Abbildung von f .

Eine Bahn $\vec{x}_0$ der Periode p heißt stabil, wenn die iterierte Abbildung $y = f^{(p)}$ eine Umgebung von x_0 kontrahiert. Hinreichend dafür ist die Bedingung $|y'(x_0)| \leq 1$.

Es gibt Funktionen, die diese Forderung erfüllen, die eine Vielzahl von periodischen Bahnen besitzen. Unter diesen gibt es allerdings höchstens nur eine Bahn, die stabil ist, wenn die Funktion f eine negative Schwarz'sche Ableitung [65] hat:

$$f''/f' - 3/2 (f''/f')^2 < 0 \quad (5.13).$$

Diese Forderung wird von allen quadratischen Funktionen erfüllt, insbesondere von der Logistischen Gleichung.

Bei der Untersuchung der Logistischen Gleichung ergibt sich durch Variation des Parameters μ in (5.9) eine Änderung des qualitativen Verhaltens der Bahnen. Um diese Veränderungen genauer zu studieren, wurde eine numerische Analyse der Logistischen Gleichung durchgeführt [78], bei der der Parameter μ von Null auf Zwei variiert wurde.

Für jeden Wert von μ bestimmt man die Bahn

$$\vec{x}_{0,\tilde{\mu}} = (x_0, \dots, x_n, \dots, x_N, \dots), \quad (5.14)$$

wobei ab einem gewissen n sämtliche Punkte bis x_N aufgezeichnet werden. Die Zahl n bestimmt sich aus der Zahl der Vorlaufiterationen, die benötigt wird, um dem jeweiligen Attraktor genügend nahe zu kommen. Mit diesem Verfahren erhält man das in Abb.12 dargestellte Ergebnis [78].

Durch die Wahl des Definitionsbereiches für x in (5.11) wird die Logistische Gleichung (5.10) sofort auf das Teilintervall $[1-\mu, 1]$ abgebildet, in dem sämtliche Bahnen verlaufen.

Man erkennt, daß in dem Wertebereich $0 \leq \mu \leq 0.75$ Bahnen der Periode Eins, also Fixpunkte, auftreten. Wird der Wert $\mu_0 = 0.75$ überschritten, ergibt sich eine Aufspaltung, eine Bifurkation, aus der eine Periodenverdopplung resultiert. Die Bahn hat die Periode 2.

Die Bifurkationen treten mit zunehmendem μ an den Stellen $\mu = \mu_n$ immer wieder auf. Es entsteht eine Kaskade von Periodenverdopplungen in der Reihenfolge 2^n bis zu einem kritischen Wert μ_c , bei dem die Periode 2^∞ erreicht ist. Bei diesem Wert liegt chaotisches Verhalten vor. Die Bahn ist völlig regellos. Der Iterationsverlauf ist unvorhersagbar.

Oberhalb von μ_c ergeben sich Zwischenbereiche, in denen die Bahnen nur einige wenige Punkte annehmen. Diese sogenannten Fenster deuten das Entstehen neuer Perioden (Periode 5, 3 usw.) an.

Haben sich diese neuen stabilen Perioden p erst einmal etabliert, so durchlaufen sie ebenfalls eine Kaskade von Periodenverdopplungen von $2^n p$ bis $2^\infty p$, d.h. bis erneut ein chaotischer Bereich erscheint.

Feigenbaum untersuchte das Konvergenzverhalten der Zahlenfolge der Bifurkationspunkte $\mu_n \rightarrow \mu_c$ bei der Logistischen, aber auch bei anderen Abbildungen mit einem einfachen Maximum [63]. Er konnte zeigen, daß in allen untersuchten Systemen das Gesetz der geometrischen Reihe gilt:

$$\mu_n - \mu_{n-1} \rightarrow a\delta^{-n} \quad (5.15),$$

wobei a ein vom jeweiligen System abhängiger Parameter ist. Der so beschriebene Weg zum Chaos wird als Feigenbaumszenarium, die Konstante δ als

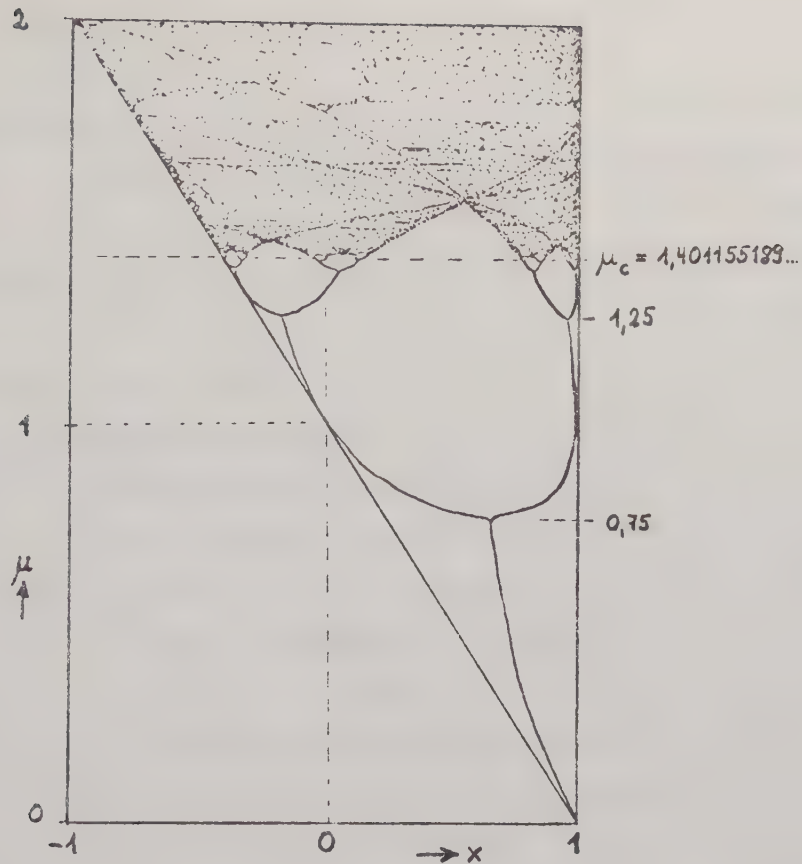


Abbildung 12. : Feigenbaum-Diagramm der Logistischen Gleichung (5.9) für $x \in [-1, 1]$ und $0 \leq \mu \leq 2$.

universelle Feigenbaumkonstante bezeichnet. Der Wert von δ hängt nur von der Ordnung des Maximums der untersuchten Abbildung ab. Für die Logistische Abbildung, mit einem quadratischen Maximum erhält man $\delta = 4.66920\dots$

Zur Bestimmung der Feigenbaumkonstante läßt sich (5.15) auch in der Form

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n \quad \text{mit} \quad \delta_n = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}} \quad (5.16)$$

angeben, in der der Parameter a nicht mehr auftritt.

Für die Periodenverdopplungen der Perioden 5, 3 usw. im Bereich $\mu > \mu_c$ ist das geometrische Abstandsgesetz (5.15) ebenfalls gültig. Mit der

Feigenbaumkonstanten δ kann damit jede, der in Abb.12 auftretenden Folge von Bifurkationen einer Periode p , beschrieben werden.

Die Frage, wie eine solche Folge von Bifurkationen bei der Logistischen Gleichung entsteht, wird im folgenden am Beispiel der Entstehung der Periode 2 beantwortet.

Eine stabile Bahn der Periode 2 besitzt genau zwei Fixpunkte. Da jeder Punkt einer Bahn der Periode 2 ein Fixpunkt der zweiten iterierten Abbildung von (5.10) ist, ist die Entstehung der Periode 2 am einfachsten zu verstehen, wenn man sich die zweite iterierte Abbildung $f_{\mu}^{(2)}(x)$ in der Umgebung des Bifurkationspunktes $\mu_0=0.75$ betrachtet. Diese ist für die Werte $\mu=0.6$ und $\mu=0.85$ in Abb.13 dargestellt [78].

Im ersten Bild ($\mu=0.6$) ist deutlich der stabile Fixpunkt $\hat{x}$ zu erkennen, zu dem jede Bahn im Phasenraum gelangt. Um dies zu verdeutlichen, sind zwei mögliche Bahnen eingezeichnet, deren Punktfolge sich mit Hilfe der angegebenen Hilfsgeraden $f_{\mu}^{(2)}(x)=x$ (5.17) leicht konstruieren läßt. Wie bereits erwähnt, garantiert die Relation

$$0 < f_{\mu}^{(2)'}(\hat{x}) < 1,$$

d.h. das Steigungsargument, die Stabilität des Fixpunktes bzw. die Stabilität der Bahn mit der Periode Eins.

Bei $\mu=0.75$ wird der kritische Wert $f_{\mu}^{(2)'}(\hat{x}) = 1$ erreicht. Der Fixpunkt bleibt aber immer noch beidseitig stabil. Im zweiten Bild ($\mu=0.85$) ist dieser Wert überschritten. Die Gerade (5.17) schneidet den Graph $f_{\mu}^{(2)}(x)$ in drei Punkten. Der nun instabil gewordene Fixpunkt $\hat{x}$ wird eingerahmt von zwei neu entstandenen Fixpunkten x_1, x_2 . Dies wird wiederum mit Hilfe der eingetragenen möglichen Bahnen verdeutlicht. Die Periode 2 ist "geboren".

Entsprechende Überlegungen können bei der Entstehung der Periode p anhand der p -ten iterierten Abbildung $f_{\mu}^{(2)}(x)$ angestellt werden.

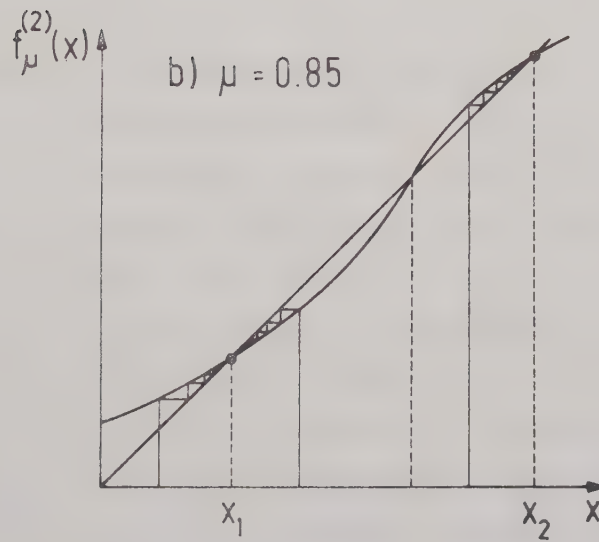
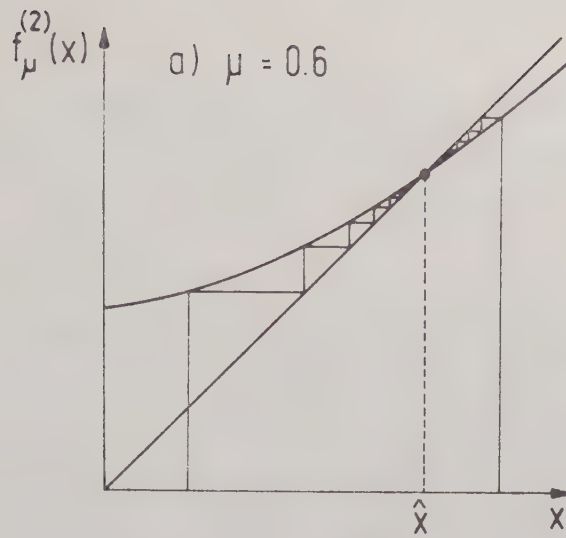


Abbildung 13. : Zweite iterierte Abbildung $f_{\mu}^{(2)}(x)$ der Logistischen Gleichung (5.9) als Funktion von x für die Parameterwerte $\mu=0.6$ und $\mu=0.85$.

Damit wird die Einführung in die Theorie der nichtlinearen Dynamik dissipativer Systeme abgeschlossen. Mit Hilfe der gewonnenen Erkenntnisse wird im nächsten Abschnitt die Entwicklung von periodischem und chaotischem Verhalten am Beispiel der optischen Bistabilität untersucht.

5.2 PERIODISCHES UND CHAOTISCHES VERHALTEN BEI DER OPTISCHEN BISTABILITÄT

Stimuliert durch die Entwicklung auf dem Gebiet der nichtlinearen Dynamik wurden in den letzten Jahren die verschiedensten nichtlinearen Systeme im Hinblick auf chaotisches Verhalten untersucht. Dies führte einerseits zu einem besseren Verständnis bekannter chaotischer Strukturen, wie sie beispielsweise beim Rayleigh-Bénard-Problem [70] oder bei der Belousov-Zhabotinsky-Reaktion [79] auftreten. Andererseits lieferten die theoretischen Ergebnisse aber auch periodisches und chaotisches Verhalten in Systemen, in denen diese Phänomene bis dahin noch nicht beobachtet wurden. Ein Beispiel hierfür ist die optische Bistabilität.

Es waren zunächst Bonifacio und Lugiato [80], sowie Mc Call [81], die das Auftreten von Instabilitäten im Gebiet hoher Transmission bei der optischen Bistabilität vorhersagten. Ikeda [22] gelang es dann, erstmals die Verbindung zwischen diesen Instabilitäten und chaotischem Verhalten herzustellen. Er untersuchte den gemischt dispersiv-absorptiven Fall der optischen Bistabilität mit Hilfe der Maxwell-Debye-Gleichungen. Im Grenzfall großer Resonatorlängen und Resonatorverstimmungen ergaben sich für die transmittierte Lichtintensität zeitlich periodische und chaotische Lösungen.

Bonifacio und Mitarbeiter [82] behandelten den rein absorptiven Fall der optischen Bistabilität über die numerische Berechnung der zeitabhängigen Maxwell-Bloch-Gleichungen. Die lineare Stabilitätsanalyse zeigte, daß die auftretenden pulsierenden, oszillatorischen Lösungen nur durch die Berücksichtigung mehrerer Resonatormoden erklärt werden konnte. Für die resonante Mode konnten keine positiven Liapunov-Exponenten nachgewiesen werden.

Benza und Lugiato [83] entwickelten daher für die absorptive optische Bistabilität eine Mehr-Moden-Beschreibung, den sogenannten "dressed-mode"-Formalismus.

Im gemischt dispersiv-absorptiven Fall der optischen Bistabilität dagegen kann periodisches und chaotisches Verhalten auch aus einer Ein-Moden-Beschreibung, wie sie durch die Maxwell-Bloch-Gleichungen in der "Mean-Field"-Näherung gegeben ist, resultieren [84]. Dies soll im folgenden genauer untersucht werden.

5.2.1 STABILITÄTSANALYSE DER MAXWELL-BLOCH-GLEICHUNGEN

Um chaotisches Verhalten beschreiben zu können benötigt man, wie bereits erwähnt mindestens drei Freiheitsgrade. Während das klassische Modell der optischen Bistabilität (Kap.3.1) nur zwei Freiheitsgrade enthält, wird diese Forderung von den semiklassischen Maxwell-Bloch-Gleichungen erfüllt. Neben den komplexen Größen des elektrischen Feldes und der Polarisation ergeben sich hier zusammen mit der Inversion fünf Freiheitsgrade der Bewegung. Prinzipiell würde es damit auch genügen, nur das elektrische Feld und die Inversion dynamisch zu behandeln und die Polarisation adiabatisch zu eliminieren [84]. Im folgenden sollen jedoch alle fünf Freiheitsgrade berücksichtigt werden. Dies geschieht über die Maxwell-Bloch-Gleichungen in der "Mean-Field"-Näherung (3.22):

$$\begin{aligned}\gamma_0^{-1} \dot{E} &= -(E - E_I/\sqrt{T}) + i\theta E - 2CP \\ \gamma_1^{-1} \dot{P} &= -(1 + i\Delta)P + ED \\ \gamma_2^{-1} \dot{D} &= -D + 1 - \frac{1}{2}(EP^* + E^*P) \quad (5.18),\end{aligned}$$

die bereits in Kap.3.2 hergeleitet wurden.

Das Gleichungssystem (5.18) ist ein konkretes Beispiel für die in Kap.5.1 angegebene allgemeine Form gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung (5.6). Es wird durch die Wahl der Parameter C , Δ , θ und γ_0 , γ_1 , γ_2 festgelegt. Das Eingangsfeld $E_0 \equiv E_I/\sqrt{T}$ (5.19) entspricht dem Parameter μ in der Logistischen Gleichung. Da es sich um ein dissipatives System handelt, wird das Phasenraumvolumen unter der Zeitentwicklung kontrahiert. Dies läßt sich durch eine einfache Rechnung nachweisen.

Die Volumenänderung im Phasenraum ist durch die Divergenz der Phasenraumgeschwindigkeit gegeben. Aus (5.18) ergibt sich damit über

$$dV/dt = \int \text{div } \vec{x} \, dV = \int x_n \, df = V \sum_{i=1}^5 \partial \dot{x}_i / \partial x_i \quad (5.20)$$

mit $\vec{x} = (E, E^*, P, P^*, D)$ sofort

$$V^{-1} dV/dt = -2\gamma_0 - 2\gamma_1 - \gamma_2 \quad (5.21),$$

wobei $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 > 0$ gilt.

Das Volumenelement wird mit konstanter Rate exponentiell verkleinert.

Damit ist die Untersuchung von periodischem und chaotischem Verhalten bei der optischen Bistabilität mit der Frage nach den auftretenden Attraktoren in (5.18) bei gegebenem Eingangsfeld E_0 verbunden.

Um diese Frage zu beantworten, werden zunächst die frei wählbaren Parameter des Systems festgelegt. Dies geschieht unter zwei Gesichtspunkten:

Einerseits muß die Bedingung für das Auftreten der Bistabilität, die man aus der Berechnung der stationären Lösungen von (5.18) erhält, erfüllt werden. Mit (5.18) und (5.19) ergibt sich für das elektrische Feld im stationären Fall

$$E_0^2 = |E|^2 \left[(1 + 2C/(1+\Delta^2+|E|^2))^2 + (-\theta - 2C\Delta/(1+\Delta^2+|E|^2))^2 \right] \quad (5.22).$$

Bistabiles Verhalten tritt genau dann auf, wenn E_0^2 als Funktion von $|E|^2$ zwei Extrema aufweist. Daraus folgt die Bedingung

$$(C - \Delta\theta - 1)^3 > (27/4) C (\Delta^2 + 1)(\theta^2 + 1) \quad (5.23).$$

Andererseits muß geprüft werden, bei welcher Parameterwahl chaotisches Verhalten bzw. ein seltsamer Attraktor resultieren kann. Dazu wird eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt.

Mit dem Ansatz $E = x + iy$, $P = P_\alpha + iP_\beta$ (5.24)

werden das komplexe elektrische Feld und die Polarisation in Real- und Imaginärteil zerlegt. Zusammen mit der Inversion ergeben sich damit aus (5.18) fünf reelle Gleichungen:

$$\gamma_0^{-1} \dot{x} = - (x - E_0) - \theta y - 2CP_\alpha$$

$$\gamma_0^{-1} \dot{y} = - y + \theta x - 2CP_\beta$$

$$\gamma_1^{-1} \dot{P}_\alpha = - P_\alpha + \Delta P_\beta + xD$$

$$\begin{aligned} \gamma_1^{-1} \dot{P}_\beta &= -P_\beta - \Delta P_\alpha + yD \\ \gamma_2^{-1} \dot{D} &= -D + 1 - (xP_\alpha + yP_\beta) \end{aligned} \quad (5.25).$$

Die Größen x , y , P_α , P_β und D werden über

$x = x_{st} + \delta x(t)$ (5.26) bzw. entsprechend für y , P_α , P_β und D um einen infinitesimalen Betrag aus ihren stationären Lösungen ausgelenkt. Setzt man (5.26) in (5.25) ein und linearisiert die Gleichungen in den Auslenkungsgrößen, erhält man das folgende Gleichungssystem

$$\dot{\delta \vec{F}} = \underline{\underline{M}} \delta \vec{F} \quad (5.27)$$

mit

$$\delta \vec{F} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta P_\alpha \\ \delta P_\beta \\ \delta D \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

und

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} -A & ; & -A\Theta & ; & -2A\zeta & ; & 0 & ; & 0 \\ A\Theta & ; & -A & ; & 0 & ; & -2A\zeta & ; & 0 \\ D_{st} & ; & 0 & ; & -1 & ; & \Delta & ; & x_{st} \\ 0 & ; & D_{st} & ; & -\Delta & ; & -1 & ; & y_{st} \\ -\beta P_{\alpha st} & ; & -\beta P_{\beta st} & ; & -\beta x_{st} & ; & -\beta y_{st} & ; & -B \end{pmatrix} \quad (5.29),$$

wobei $A \equiv \gamma_0/\gamma_1$ und $B \equiv \gamma_2/\gamma_1$ gesetzt wurde. Die zeitliche Entwicklung von $\delta \vec{F}$ wird über den Ansatz

$$\delta \vec{F} = e^{\lambda t} \delta \vec{F}_0 \quad (5.30),$$

mit den Anfangsauslenkungen $\delta \vec{F}_0$ berechnet. Einsetzen von (5.30) in (5.27) liefert über die Bedingung

$\text{Det}(\underline{\underline{M}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$ (5.31) eine Gleichung fünften Grades in λ , die charakteristische Gleichung. Aus deren Lösung erhält man fünf Eigenwerte. Es sind die Liapunov-Exponenten in der Umgebung eines Fixpunktes.

Wie sich zeigt [84-86], können die Realteile der Liapunov-Exponenten im Gebiet hoher Transmission positive Werte annehmen, wenn die Konstante C , die die Kopplung des elektrischen Feldes an das nichtlineare Medium beschreibt, hinreichend groß gewählt wird und die Beträge der Verstimmungsparameter Δ und Θ ungefähr die gleichen Werte aufweisen.

Mit diesem Hinweis auf chaotisches Verhalten und der Berücksichtigung der Bistabilitätsbedingung (5.23) werden für die Parameter, in Anlehnung an [85] die Werte

$$C = 5000, \Delta = 70, \Theta = -70, \\ \gamma_0 = 2, \gamma_1 = 100, \gamma_2 = 1 \quad (5.32)$$

gewählt.

Damit kann die Untersuchung der Stabilität der zeitabhängigen Lösungen der Maxwell-Bloch-Gleichungen (5.18) durchgeführt werden. Analog der linearen Stabilitätsanalyse werden die dynamischen Größen des Systems mit (5.26) aus ihren stationären Lösungen ausgelenkt. Die Zeitentwicklung der Auslenkungen wird bei jeweils vorgegebenem Eingangsfeld E_0 unter Beibehaltung der Parameterwerte (5.32) numerisch berechnet. Dabei werden im Unterschied zur linearen Stabilitätsanalyse auch sämtliche nichtlinearen Terme berücksichtigt. Mit diesem Verfahren werden die Attraktoren des Systems bei gegebenem Parameter E_0 ermittelt.

Zur numerischen Berechnung wurde das bekannte Runge-Kutta-Integrationsverfahren [42] verwendet. Die Anfangsauslenkungen bei $t=0$ wurden aus den stationären Werten der dynamischen Größen bestimmt und einheitlich mit

$$\delta x_i(0)/x_{st_i} = 10^{-3} \quad \forall i=1,2,\dots,5 \quad (5.33)$$

festgelegt. Wie sich zeigt, sind die Ergebnisse von der speziellen Wahl der Anfangsauslenkungen unabhängig, wenn die Bedingung

$$|\delta x_i(0)| \ll |x_{st_i}| \quad \forall i=1,2,\dots,5 \quad \text{erfüllt ist.}$$

Die erzielten Resultate werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

5.2.2 ERGEBNISSE

Mit dem geschilderten numerischen Verfahren ergeben sich für das elektrische Feld, wie von der linearen Stabilitätsanalyse erwartet, im Gebiet hoher Transmission, zeitlich periodische und chaotische Lösungen. Abb.14 gibt zunächst einen Überblick über die verschiedenen Lösungstypen, die man durch Variation des Eingangsfeldes E_0 erhält.

Dazu sind die stationären Lösungen bzw. die Fixpunkte (5.22) des elektrischen Feldes unter Verwendung der Parameter (5.32) dargestellt. Der Kurvenverlauf entspricht der typischen bistabilen Kennlinie, wie sie bereits in Kap.4 berechnet wurde (siehe Abb.6).

Im unteren Transmissionsast erhält man stabile zeitabhängige Lösungen [o]. Nach der Auslenkung kehrt das System zu dem Fixpunkt zurück. Die Trajektorie im Phasenraum des komplexen elektrischen Feldes führt zu einem stabilen Fokus (Abb.10a).

Entsprechend den Überlegungen in Kap.4, sind die Fixpunkte auf der Kurve mit negativer Steigung [□] instabil. Das elektrische Feld nimmt unter der Zeitentwicklung einen stabilen Wert auf dem unteren Transmissionsast an.

Der interessanteste Bereich liegt im Gebiet hoher Transmission. Kurz oberhalb des zweiten Umkehrpunktes der Bistabilitätskurve findet man instabile Lösungen mit Kurzzeit-Oszillationen [●]. Ein Beispiel hierfür ist in Abb.15 dargestellt.

Neben der zeitabhängigen Intensität des elektrischen Feldes im Resonator, die über

$$I(t) = |E(t)|^2 = (x_{st} + \delta x(t))^2 + (y_{st} + \delta y(t))^2 \quad (5.34)$$

berechnet wurde, ist auch die entsprechende Trajektorie im Phasenraum angegeben. Man sieht deutlich, wie die Intensität des elektrischen Feldes nach anfänglichen Oszillationen in den unteren Transmissionsast

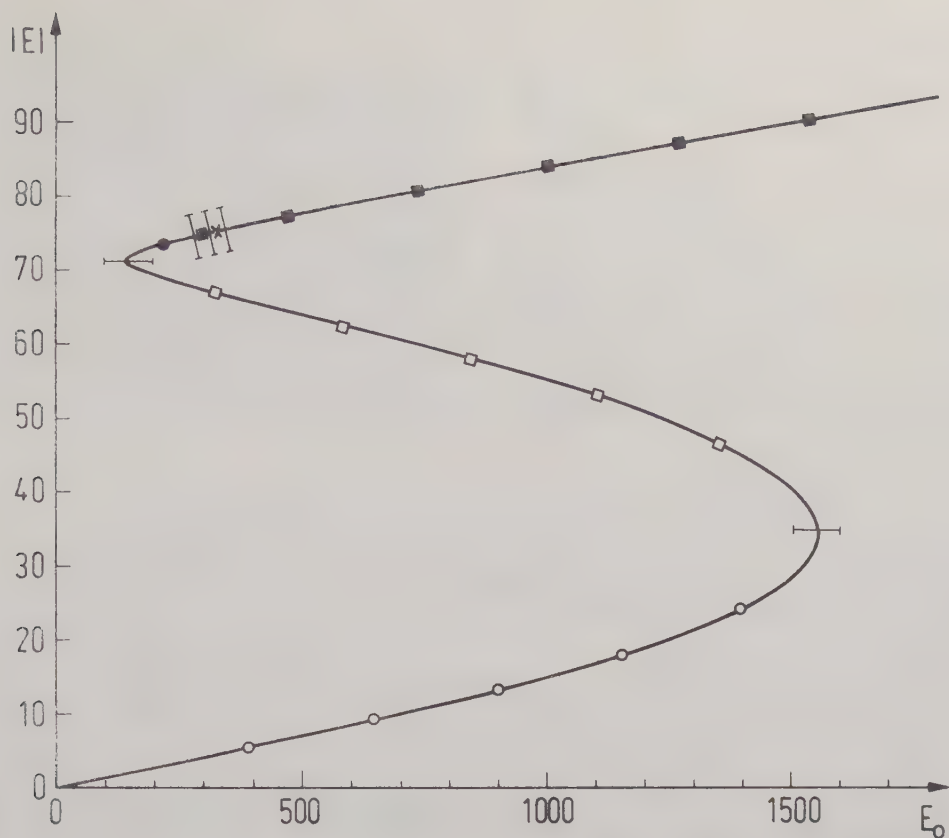


Abbildung 14. : Stabilitätsanalyse der stationären Lösungen der Maxwell-Bloch-Gleichungen (5.18) für das elektrische Feld mit den Parameterwerten (5.32). E_0 bezeichnet das einfallende Lichtfeld, $|E|$ gibt den Betrag des elektrischen Feldes im Resonator an. Es resultieren: stabile Lösungen (○), instabile Lösungen (□), instabile Lösungen mit Kurzzeit-Oszillationen (●), periodische Lösungen (■) und chaotische Lösungen (x).

relaxiert. Die Trajektorie ähnelt zunächst einem Grenzzyklus (vgl. dazu Abb.10c), verläßt diesen aber wieder und erreicht den stabilen Fixpunkt $|E| = 3.58$ (Um die Fixpunkte in Abb.14 eindeutig zuordnen zu können, werden statt des Eingangsfeldes E_0 jeweils die Beträge des elektrischen Feldes im Resonator $|E|$ angegeben.).

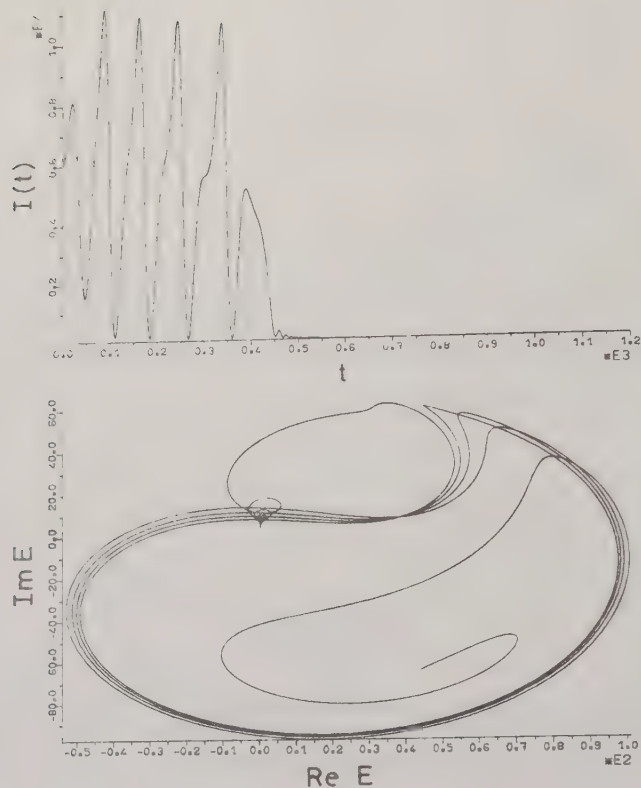


Abbildung 15. : Beispiel aus dem Gebiet der instabilen Lösungen mit Kurzzeit-Oszillationen. Für $|E|=74.364$ sind die Intensität des elektrischen Feldes $I(t)$ als Funktion der Zeit t , sowie das Phasenraumbild des komplexen elektrischen Feldes dargestellt.

Im Anschluß an das Gebiet der Kurzzeit-Oszillationen erhält man zeitlich ungedämpfte periodische Lösungen mit konstanter Amplitudenfolge [■], sowie einen schmalen Bereich mit chaotischen Lösungen [x]. Beginnt man die Untersuchung der Stabilität der Fixpunkte im Gebiet hoher Transmission mit einem Wert des Eingangsfeldes E_0 weit oberhalb des chaotischen Bereichs und erniedrigt diesen schrittweise, ergibt sich die in Abb.16 und Abb.17 dargestellte Folge von unterschiedlichen Lösungen.

Neben dem zeitlichen Verlauf der Intensität ist jeweils das Phasenraumbild des elektrischen Feldes angegeben. Dabei wurde, entspre-

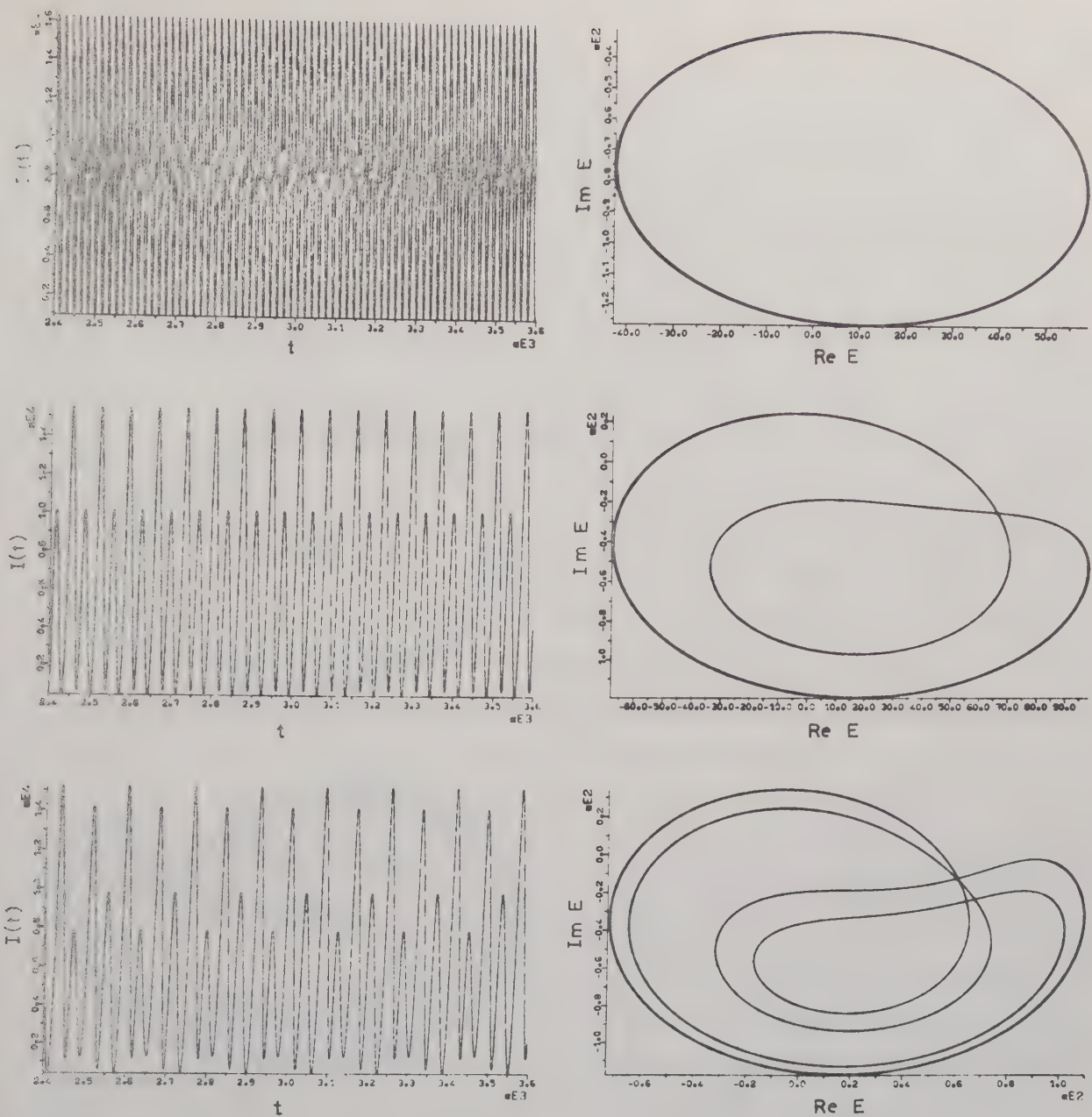


Abbildung 16. : Periodenverdopplungen im oberen Transmissionsast bei der optischen Bistabilität. Für die Werte $|E| = 89.443$, $|E| = 77.460$ und $|E| = 76.158$ sind jeweils die Intensität des elektrischen Feldes $I(t)$ als Funktion der Zeit, sowie die Phasenraumbilder des komplexen elektrischen Feldes dargestellt.

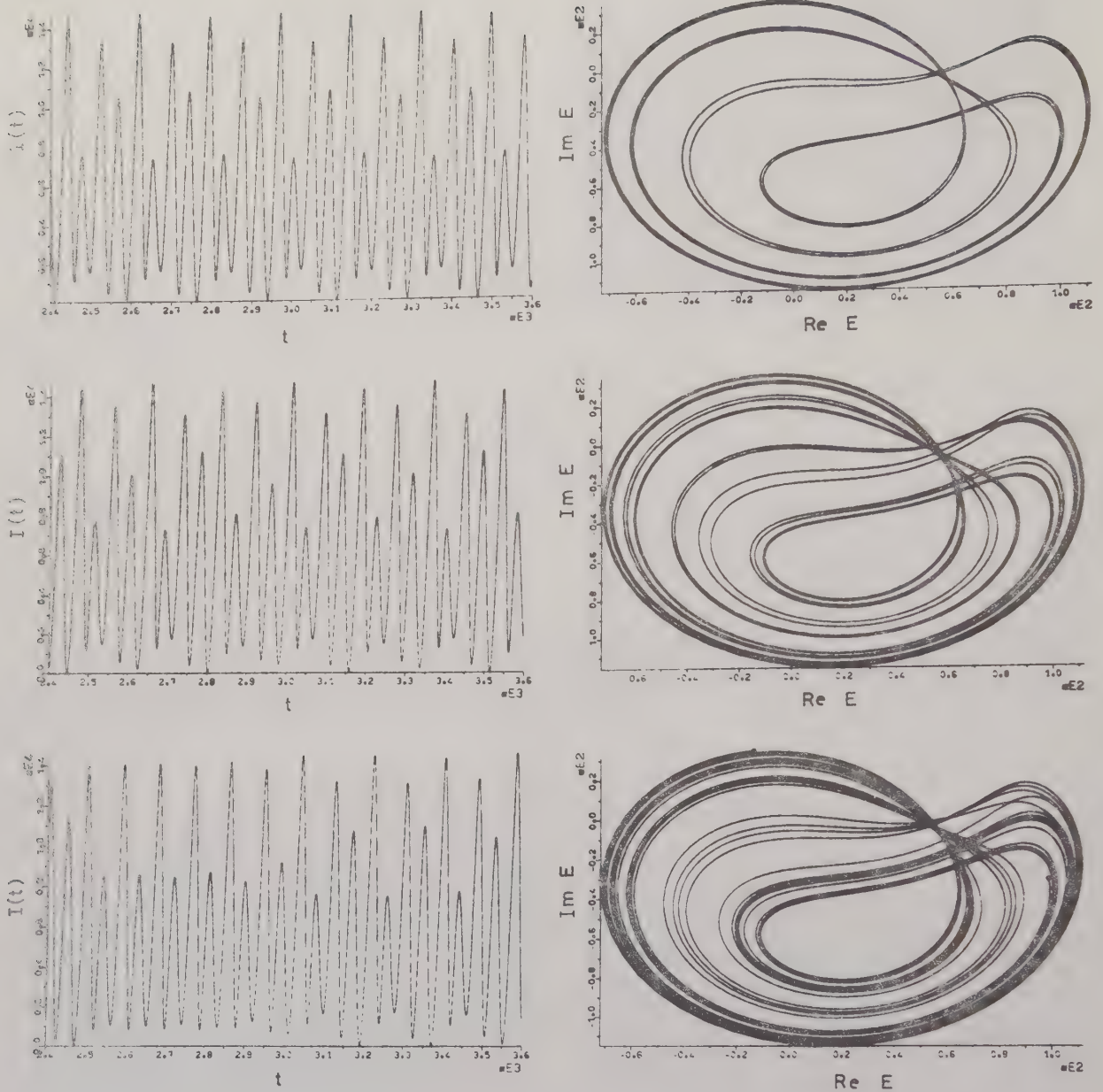


Abbildung 17. : Periodenverdopplungen und Chaos im oberen Transmissionsast bei der optischen Bistabilität. Für die Werte $|E| = 75.763$, $|E| = 75.690$ und $|E| = 75.634$ sind jeweils die Intensität des elektrischen Feldes $I(t)$ als Funktion der Zeit, sowie die Phasenraumbilder des komplexen elektrischen Feldes dargestellt.

chend dem Vorgehen bei der Logistischen Gleichung, eine Vorlaufzeit abgewartet, bis das System dem Attraktor genügend nahe gekommen ist. Diese ist für alle Werte E_0 einheitlich gewählt. Wie man erkennen kann, durchlaufen die zeitabhängigen Lösungen des elektrischen Feldes mit abnehmendem Eingangsfeld E_0 eine Kaskade von Periodenverdopplungen.

Im ersten Bild oszilliert die Intensität mit einer Grundperiode. Da die Zahl der unterschiedlichen Maxima oder Minima, die innerhalb einer Periodenlänge angenommen werden Eins beträgt, wird dieser Grundperiode der Wert Eins zugeordnet.

Im Phasenraum erhält man einen marginal stabilen Grenzzyklus. Es folgen die Periodenwerte 2, 4, 8 und 16. Das letzte Bild entspricht einem Wert des Eingangsfeldes E_0 aus dem chaotischen Bereich. Aus der Folge der Intensitätsmaxima ist keine Periodenstruktur mehr erkennbar. Die Trajektorie ist dementsprechend nicht mehr geschlossen. Um dies zu verdeutlichen, wurde der Anfangs- und der Endpunkt markiert. Verfolgt man die zeitliche Entwicklung der Intensität bei einem längeren als dem hier angegebenen Zeitraum, nimmt die Kette von verschiedenen Maxima und Minima weiter zu. Die Phasenraumbahnen liegen dann jedoch so dicht, daß sie in der Zeichnung nicht mehr aufgelöst werden können.

Die numerischen Ergebnisse liefern damit einen Hinweis auf chaotisches Verhalten bei der optischen Bistabilität. Dieses, wird ähnlich wie bei der Logistischen Gleichung, über eine Folge von Periodenverdopplungen erreicht. Wie sich zeigt, erhält man dieselbe Folge von Periodenverdopplungen, wenn man sich dem chaotischen Bereich von der anderen Seite, d.h. von kleinen Werten des Eingangsfeldes E_0 , nähert. Da das Existenzgebiet der periodischen Lösungen hier sehr schmal ist, konnten die Bifurkationspunkte nicht genau ermittelt werden. Der folgende Vergleich mit dem Feigenbaumszenarium wird deshalb für die Werte oberhalb des chaotischen Bereichs durchgeführt.

Dazu wurden die Periodenlängen T der oszillierenden Lösungen über

$T := t(I_{\max}^{p+1}) - t(I_{\max}^1)$ (5.35) berechnet. p bezeichnet den jeweiligen Periodenwert. Die Ergebnisse sind in Abb.18 dargestellt.

Wie man sieht, nimmt die Periodenlänge mit abnehmendem Eingangsfeld E_0 zu und verdoppelt sich jeweils diskontinuierlich bei bestimmten Werten dieses Parameters. Man erhält die Folge von Periodenverdopplungen ($p=1,2,4,8,16$), die in Abb.16 und Abb.17 angegeben wurde. Die Existenzgebiete der Periodenwerte konnten bis einschließlich $p=16$ ermittelt werden. Die Abstände zwischen zwei Sprungstellen der Periodenlänge T werden, wie bei der Logistischen Gleichung, mit zunehmendem Periodenwert p immer kleiner.

Setzt man die den Sprungstellen entsprechenden Parameterwerte E_0^n in die Formel (5.16) zur Berechnung der Feigenbaumkonstante δ ein, erhält man mit

$$\delta_n = \left| \frac{E_0^{n+1} - E_0^n}{E_0^{n+2} - E_0^{n+1}} \right| \quad (5.36)$$

die Werte $\delta_1 = 3.90$

$$\delta_2 = 4.52$$

$$\delta_3 = 4.58 \quad (5.37).$$

Aus der Folge der drei Koeffizienten δ_n ergibt sich bereits eine relativ gute Übereinstimmung mit dem Wert der Feigenbaumkonstanten $\delta=4.66920\dots$, die nach (5.16) erst im Limes $n \rightarrow \infty$ erreicht wird.

Damit deutet sich an, daß der Weg zu chaotischem Verhalten bei der optischen Bistabilität über das Feigenbaumszenarium verläuft. Auch die Tatsache, daß innerhalb des chaotischen Bereichs, wie bei der Logistischen Gleichung, Fenster der Grundperioden 3 und 5 auftreten, weist darauf hin. In Abb.19 ist mit dem Periodenwert $p=12$ ein Beispiel dafür angegeben.

Deutlich ist zu erkennen, wie die Intensität zwölf unterschiedliche Maxima periodisch durchläuft.

Ähnliche Ergebnisse wurden kürzlich von Narducci und Mitarbeitern [85] erzielt. In dieser Arbeit wurden die zeitabhängigen Lösungen der Maxwell-Bloch-Gleichungen unter adiabatischer Elimination der

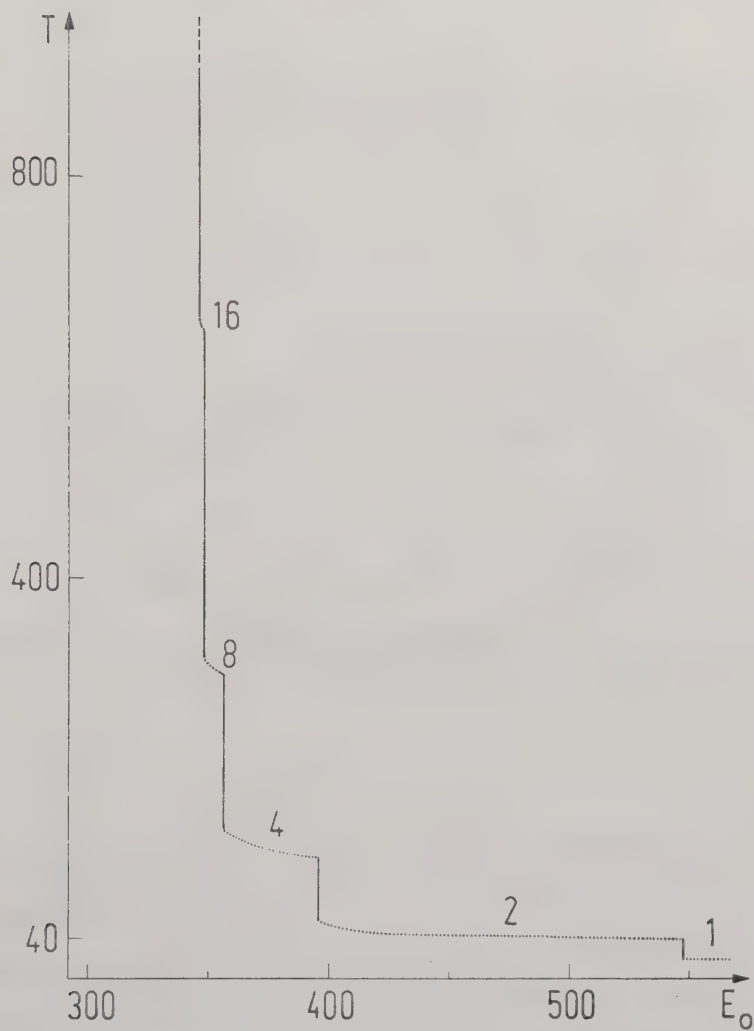


Abbildung 18. : Periodenlänge T als Funktion des einfallenden Lichtfeldes E_0 für Werte E_0 oberhalb des chaotischen Bereichs.

Polarisation und gegenüber (5.32) geringfügig veränderten Parameterwerten numerisch berechnet. Fensterlösungen konnten allerdings nicht ermittelt werden.

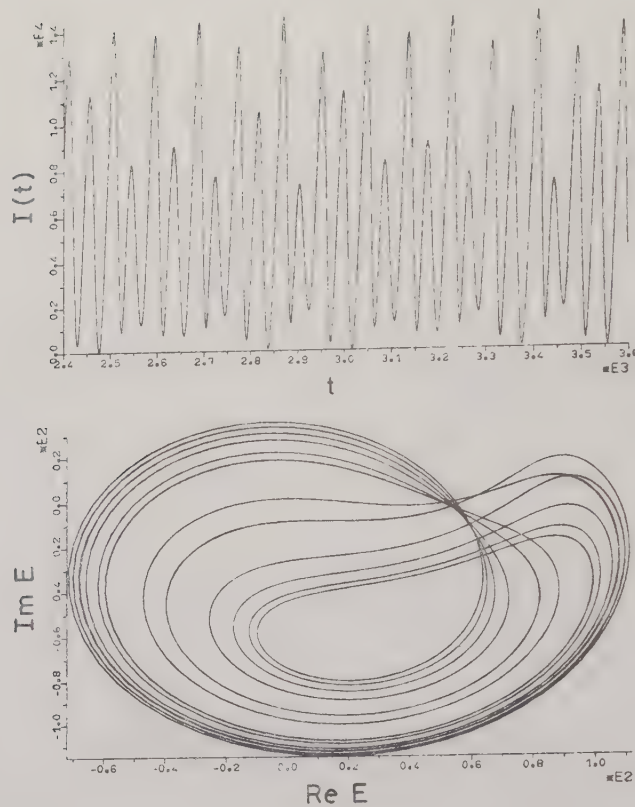


Abbildung 19. : Beispiel für ein Fenster der Grundperiode 3 mit $p=12$. Für den Wert $|E|=75.631$ sind die Intensität des elektrischen Feldes $I(t)$ als Funktion der Zeit t , sowie das Phasenraumbild des komplexen elektrischen Feldes dargestellt.

Im nächsten Abschnitt (Kap.5.2.3) wird durch die Konstruktion einer eindimensionalen Abbildung, das Vorliegen des Feigenbaumszenariums bei der optischen Bistabilität bewiesen.

Zuvor sollen die physikalischen Ursachen für das Auftreten der periodischen und chaotischen Lösungen untersucht werden.

Die Frage nach der Entstehung der Grundperiode, wie sie im ersten Bild in Abb.16 dargestellt ist, läßt sich über die lineare Stabilitätsanalyse beantworten. Dazu werden, ausgehend von den fünf Liapunov-Exponenten λ_i bei

gegebenem Eingangsfeld E_0 , die Eigenvektoren $\vec{\delta F}_0(\lambda_i)$ über (5.27) und (5.30) mit

$$(\underline{M} - \lambda_i \underline{1}) \vec{\delta F}_0(\lambda_i) = 0 \quad \text{und } i=1,2,\dots,5 \quad (5.38)$$

berechnet. Für die zeitliche Entwicklung der Auslenkungsgrößen $\delta F_i(t)$ ergibt sich

$$\delta F_i(t) = \sum_{j=1}^5 e^{\lambda_j t} \delta F_{0i}(\lambda_j) a_j \quad (5.39),$$

wobei die Koeffizienten a_j aus der Randbedingung

$$\delta F_i(0) = \sum_{j=1}^5 \delta F_{0i}(\lambda_j) a_j \quad (5.40)$$

für die vorgegebenen Anfangsauslenkungen $\delta F_i(0)$ zur Zeit $t=0$ ermittelt wurden. Mit der Kenntnis der zeitlichen Entwicklung der Auslenkungsgrößen $\delta F_i(t)$ erhält man für die Intensität des elektrischen Feldes

$$I(t) = |E|^2 = (x_{st} + \delta x(t))^2 + (y_{st} + \delta y(t))^2$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_{x,y}(t) = & e^{\operatorname{Re}(\lambda_1)t} \left[2 \operatorname{Re}(\delta_{x,y}(\lambda_1)) \cos(\operatorname{Im}(\lambda_1)t) \right. \\ & \left. - 2 \operatorname{Im}(\delta_{x,y}(\lambda_1)) \sin(\operatorname{Im}(\lambda_1)t) \right] \\ & + e^{\operatorname{Re}(\lambda_3)t} \left[2 \operatorname{Re}(\delta_{x,y}(\lambda_3)) \cos(\operatorname{Im}(\lambda_3)t) \right. \\ & \left. - 2 \operatorname{Im}(\delta_{x,y}(\lambda_3)) \sin(\operatorname{Im}(\lambda_3)t) \right] + \delta_{x,y}(\lambda_5) e^{\lambda_5 t} \quad (5.41). \end{aligned}$$

Dabei wurde berücksichtigt, daß die Liapunov-Exponenten λ_2 und λ_4 des elektrischen Feldes und der Polarisation jeweils konjugiert komplex zu λ_1 bzw. λ_3 sind. Der Liapunov-Exponent für die Inversion λ_5 ist dagegen rein reell. Mit diesem Verfahren erhält man bei einem Wert des Eingangsfeldes

E_0 weit oberhalb des chaotischen Bereichs, die in Abb.20 dargestellte Lösung (5.41) für die Intensität.

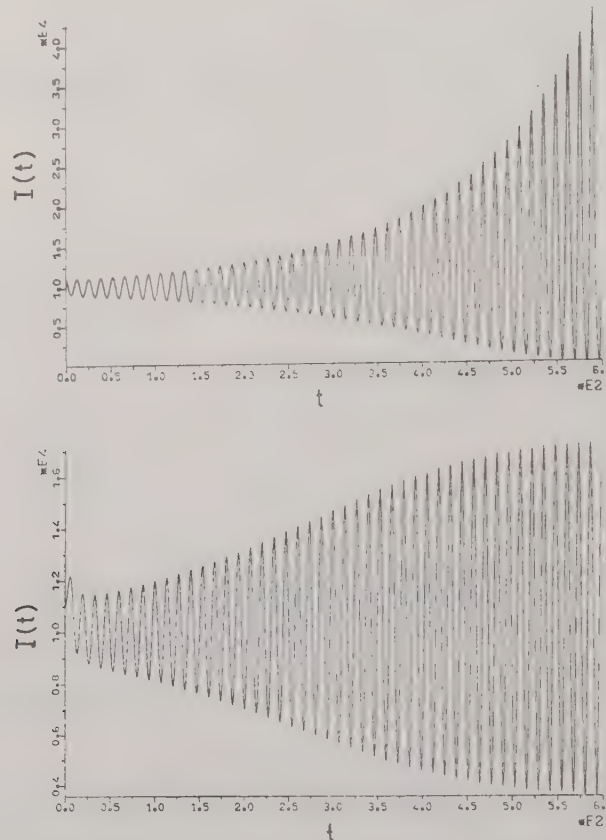


Abbildung 20. : Vergleich zwischen der linearen Stabilitätsanalyse (oben) und der exakten numerischen Stabilitätsanalyse (unten) für $|E| = 100$. Aufgetragen ist jeweils die Intensität des elektrischen Feldes $I(t)$ als Funktion der Zeit t .

Zum Vergleich ist das entsprechende Ergebnis der exakten, numerisch durchgeführten Stabilitätsanalyse angegeben. Während bei der linearen Stabilitätsanalyse die Amplitude der Intensität unter der Zeitentwicklung anwächst, wird im exakten Resultat nach der Auslenkung der marginal stabile Grenzzyklus mit dem Periodenwert 1 erreicht. Beide Lösungen

oszillieren jedoch mit der gleichen Frequenz. Diese läßt sich aus der linearen Stabilitätsanalyse ermitteln.

Mit $\text{Re}(\lambda_1) > 0 > \text{Re}(\lambda_3), \text{Re}(\lambda_5)$ und dem Ergebnis

$|\delta x_o, y_o(\lambda_i)| \ll 1 \quad \forall i=1,2,3$ reduziert sich (5.41) für große Zeiten t auf

$$I(t) \approx I_{st} + 4x_{st}, y_{st} [\text{Re}(\delta x_o, y_o(\lambda_1)) \cos(\text{Im}(\lambda_1)t) - \text{Im}(\delta x_o, y_o(\lambda_1)) \sin(\text{Im}(\lambda_1)t)] e^{\text{Re}(\lambda_1)t} \quad (5.42).$$

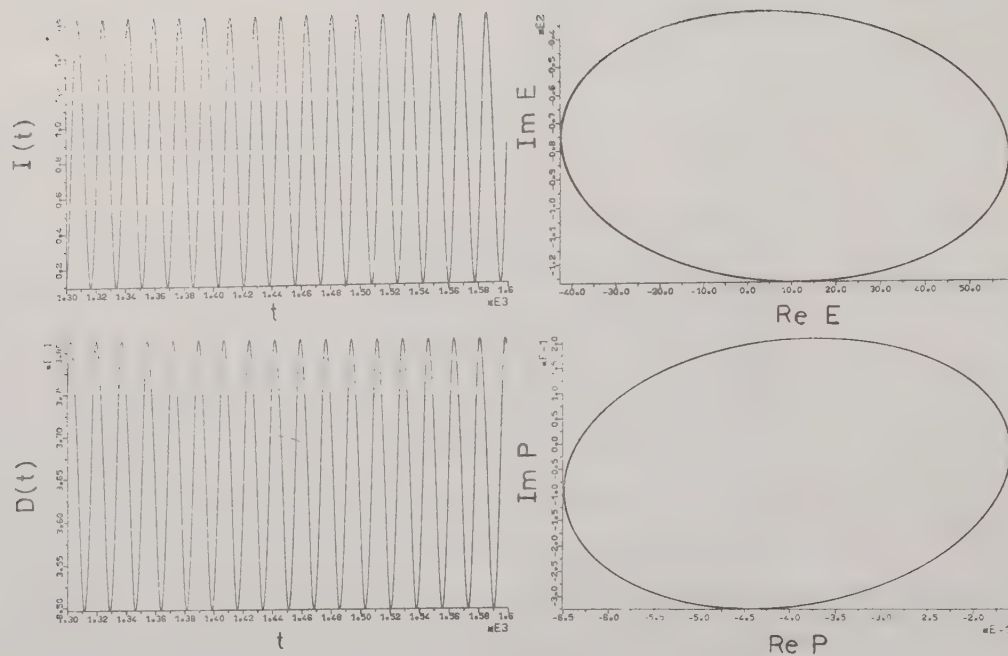
Wie man erkennen kann, ist die Frequenz durch den Imaginärteil desjenigen Liapunov-Exponenten gegeben, der einen positiven Realteil aufweist (λ_1).

Das Auftreten eines Liapunov-Exponenten mit positivem Realteil deutet die Instabilität der stationären Lösung im oberen Transmissionsast an. Diese wird durch die starke Kopplung des elektrischen Feldes an das nichtlineare Medium verursacht ($C=5000$). Die Amplitude der bezüglich des elektrischen Feldes resonanten Mode wird instabil. Es kommt zu Oszillationen, die spontan erzeugt werden, ohne Veränderung der äußeren Parameter.

Im Hinblick auf eine praktische Anwendung der optischen Bistabilität eröffnet sich damit die Möglichkeit, beim Übergang von dem Zustand niedriger zu dem Zustand hoher Transmission ein stationäres Lichtfeld in ein pulsierendes Lichtfeld umzuwandeln.

Durch die Berücksichtigung aller fünf Freiheitsgrade in den Maxwell-Bloch-Gleichungen (5.18) kann neben der Intensität des elektrischen Feldes auch das zeitliche Verhalten der Polarisierung und der Inversion angegeben werden. In Abb.21 sind die numerisch erzielten Ergebnisse für die Intensität und die Inversion, sowie für das komplexe elektrische Feld und die komplexe Polarisierung bei einem Wert E_o aus dem Bereich der Grundperiode dargestellt.

Wie man sieht schwingen sämtliche dynamischen Größen mit dieser Grundperiode. Zwischen der Intensität und der Inversion besteht eine Phasenverschiebung von $\pi/2$. Auch die lineare Stabilitätsanalyse liefert dieses



Abbildungung 21. : Vergleich zwischen der Intensität des elektrischen Feldes $I(t)$ als Funktion der Zeit t (links oben) und der Inversion $D(t)$ als Funktion der Zeit t (links unten), sowie zwischen den Phasenraumbildern des komplexen elektrischen Feldes (rechts oben) und der komplexen Polarisierung (rechts unten) für den Wert $|E| = 89.443$.

Ergebnis. Während bei der Intensität in (5.42) der Realteil des Eigenvektors viel kleiner ist als der Imaginärteil

$$[\text{Re}(\delta x_{\text{o}}, y_{\text{o}})) \ll \text{Im}(\delta x_{\text{o}}, y_{\text{o}}(\lambda_1))]$$

und damit eine Sinusschwingung resultiert, existiert bei der reellen Inversion nur der Realteil. Es kommt zu einer Kosinusschwingung. Der

Grenzzyklus der Polarisation ist gegenüber dem des elektrischen Feldes gedreht. Auch hier liegt eine Phasenverschiebung vor.

Mit abnehmenden Eingangsfeld wird die Frequenz der Grundperiode kleiner. Wird der Bifurkationspunkt erreicht, kommt es zu einer Periodenverdoppelung. Diese entsteht aus der Überlagerung der Grundfrequenz der resonanten Mode mit der halben Frequenz der Nachbarmode. Ein Teil der Energie wird auf diese Nachbarmode übertragen. Sie wird entdämpft. Abb.22 verdeutlicht diesen Vorgang.

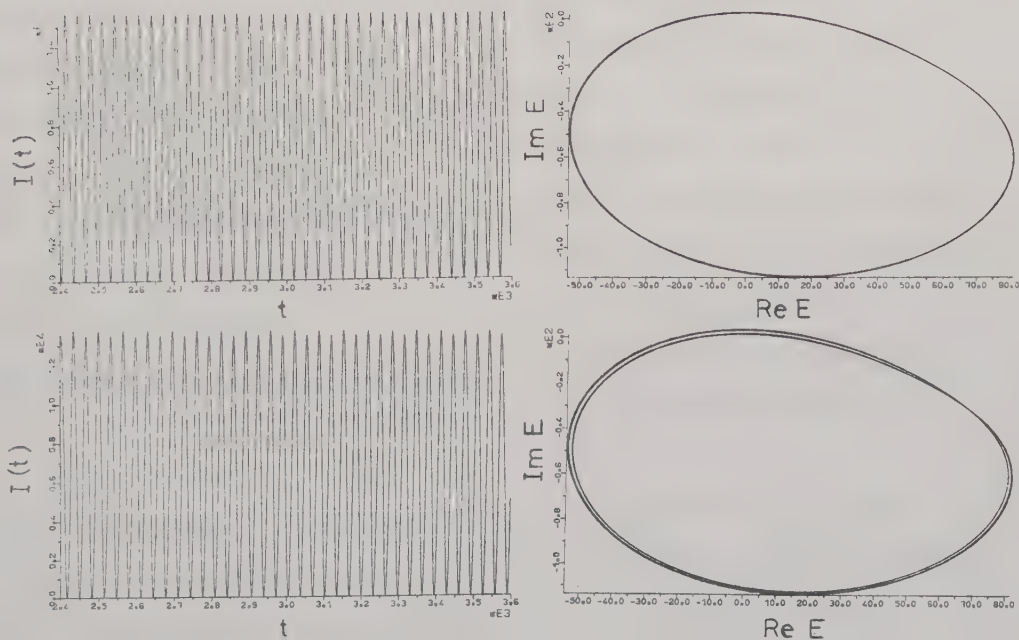


Abbildung 22. : Entstehung der Periode 2.

Für die Werte $|E| = 78.549$ (oben) und $|E| = 78.486$ (unten) sind jeweils die Intensität des elektrischen Feldes $I(t)$ als Funktion der Zeit t , sowie das Phasenraumbild des komplexen elektrischen Feldes dargestellt.

In den ersten beiden Bildern (oben) oszilliert die Intensität noch mit der Grundperiode, die Kurve des Grenzzyklus ist bei dem gewählten Wert des Eingangsfeldes E_0 , kurz oberhalb des Bifurkationspunktes, leicht verbreitert. Eine weitere Absenkung des Eingangsfeldes führt zu der in den unteren beiden Bildern dargestellten Periodenverdopplung. Wie man erkennen kann, ist jedes zweite Maximum abgesenkt bzw. angehoben. Der Periodenwert 2 ist entstanden.

Entsprechende Überlegungen gelten für die Übergänge zu den Periodenwerten 4,8 usw.. Die Periodenverdopplungen führen zu einer immer länger werdenden Kette von unterschiedlichen Maxima und Minima bzw. zu einem immer länger werdenden Grenzzyklus. Da das Phasenraumvolumen unter der Zeitentwicklung kontrahiert wird, liegen die Trajektorien immer dichter im Phasenraum. Dadurch ergibt sich eine empfindliche Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. Zwei benachbarte Punkte im Phasenraum nehmen einen völlig unterschiedlichen Verlauf. Sie werden makroskopisch separiert. Dies ist der Übergang zu deterministischem Chaos, das mit dem Auftreten eines seltsamen Attraktors verbunden ist.

Die bisher vorgestellten Ergebnisse deuten darauf hin, daß bei der optischen Bistabilität über das Feigenbaumszenarium ein seltsamer Attraktor entsteht. Ein direkter Nachweis dieses Attraktors gelingt jedoch nicht und ist auch im allgemeinen in kontinuierlichen Systemen, selbst bei hohem Rechenzeitaufwand, durch die endliche numerische Genauigkeit nur schwer durchführbar. Wie bei der Untersuchung des Lorenz-Attraktors [62] ist es allerdings möglich, durch ein geeignetes Diskretisierungsverfahren, für die zeitliche Entwicklung der Intensität des elektrischen Feldes eine eindimensionale Abbildung zu konstruieren. Mit dieser einfacheren Beschreibung gelingt es, das Feigenbaumszenarium und damit die Existenz des seltsamen Attraktors bei der optischen Bistabilität nachzuweisen. Dies wird im nächsten Abschnitt durchgeführt.

5.2.3 NACHWEIS DES FEIGENBAUMSZENARIUMS MIT HILFE EINER EINDIMENSIONALEN ABBILDUNG

In der symbolischen Dynamik, einem Teilgebiet der allgemeinen Theorie dynamischer Systeme, wird die zeitliche Entwicklung eines Systems durch eine Folge von ausgewählten Punkten (Symbolen) beschrieben. Aus dieser Symbolfolge läßt sich eine Abbildung konstruieren, die sämtliche Informationen über die Dynamik des Systems enthält [69].

Der Übergang von einem zeitlich kontinuierlichen auf ein zeitlich diskretes System ermöglicht damit einen Vergleich mit diskreten Abbildungen, für die exakte mathematische Aussagen vorliegen.

Die Untersuchungen von Feigenbaum haben gezeigt (Kap.5.1.2), daß der Weg zu chaotischem Verhalten bei jeder eindimensionalen Abbildung, die ein einfaches Maximum aufweist und eine negative Schwarz'sche Ableitung besitzt, über das Feigenbaumszenarium verläuft. Findet man, durch eine geeignete Wahl der Symbolfolge, für die Intensität des elektrischen Feldes, eine eindimensionale Abbildung mit diesen Eigenschaften, ist das Feigenbaumszenarium bei der optischen Bistabilität nachgewiesen.

Zur Erzeugung von Symbolfolgen bieten sich verschiedene Verfahren an. Die bekanntesten sind das Poincaré-, das Stroboskopische und das Lorenz-Verfahren [69,87]. So wurde das Poincaré-Verfahren beispielsweise bei der Belousov-Zhabotinski-Reaktion [88], das Stroboskopische Verfahren bei der Untersuchung eines getriebenen anharmonischen Oszillators [89] erfolgreich verwendet. Beide Abbildungen zeigten ein einfaches Maximum.

Für die Intensität des elektrischen Feldes erweist sich das Lorenz-Verfahren als besonders geeignet. Bei dieser Diskretisierungsmethode wird aus dem zeitlich kontinuierlichen Verlauf der Intensität $I(t)$, ausgehend von einem Zeitpunkt t_0 , die Folge der Maxima

$$\{ I_{\max}^0, I_{\max}^1, \dots, I_{\max}^n, \dots, I_{\max}^N \} \quad (5.43),$$

bestimmt. Die Symbolfolge (5.43) entspricht der Bahn (5.14), die sich bei der Logistischen Gleichung durch Iteration von (5.9) ergab. Die Definition der Periode läßt sich ebenfalls sofort übertragen. Für den Periodenwert p gilt $I_{\max}^{n+p} = I_{\max}^n \quad \forall n$.

Trägt man $I_{\max}^{n+1}$ gegen $I_{\max}^n$ auf, ergibt sich die Lorenz-Abbildung. Bei den Grenzzyklen mit den Periodenwerten p , wie sie in Abb.16 und Abb.17 angegeben wurden, besteht diese Abbildung aus p Punkten. In Abb.23 ist mit $p=16$ ein Beispiel dafür angegeben [90].

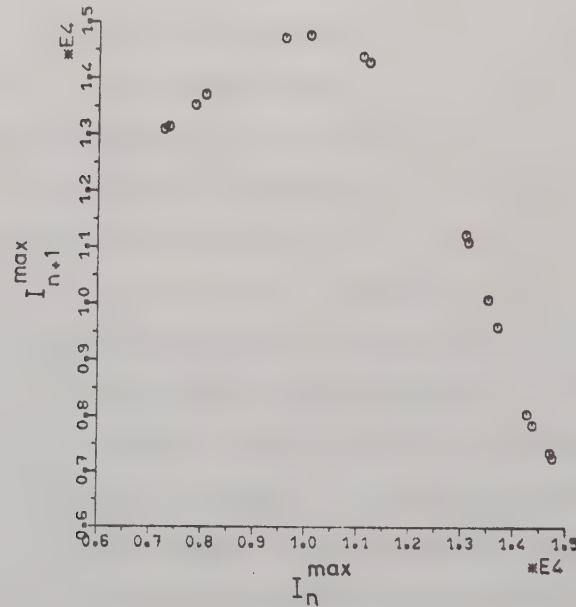


Abbildung 23. : Lorenz-Abbildung der Intensität des elektrischen Feldes $I(t)$ am Beispiel des Periodenwertes $p=16$. Aufgetragen sind die Werte $I_{\max}^{n+1}$ gegen $I_{\max}^n$ für $|E| = 75.690$. $N=80$ Maximawerte wurden berücksichtigt.

Wie im kontinuierlichen Fall, wird zunächst eine Vorlaufzeit t_0 abgewartet, bis das System den Attraktor erreicht hat und anschließend die Folge von $N=80$ Maximawerten aufgezeichnet. Wie man sieht, liegen die Punkte tatsächlich auf einer Kurve mit einem einfachen Maximum.

Noch deutlicher wird der Kurvenverlauf, wenn man sich die chaotischen Lösungen betrachtet. Für einen Wert des Eingangsfeldes in der Nähe der oberen Grenze des chaotischen Bereichs (vgl. Abb.14), erhält man die in Abb.24 dargestellte Abbildung.

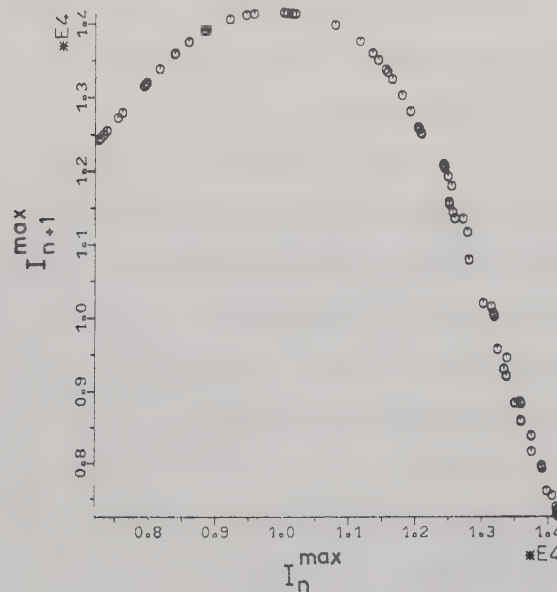


Abbildung 24. : Lorenz-Abbildung der Intensität des elektrischen Feldes $I(t)$ mit quadratischem Maximum, für einen Wert $|E| = 75.366$ aus dem chaotischen Bereich. Aufgetragen sind die Werte I_{max}^{n+1} gegen I_{max}^n . $N=80$ Maximawerte wurden berücksichtigt.

Die Ähnlichkeit mit der Abbildung der Logistischen Gleichung (Abb.11), die ein einfaches quadratisches Maximum aufweist, ist offensichtlich. Eine Periodenstruktur ist nicht mehr zu erkennen. Die Punkte füllen die Kurve fast vollständig aus. Die Untersuchung der Maximafolge zeigt, daß den Werten $I_{\max}^n$ mit kleiner Amplitude immer zwei Werte $I_{\max}^{n\pm 1}$ mit großer Amplitude benachbart sind. Durch die Konstruktion der Lorenz-Abbildung ergeben sich damit keine Punkte in der linken unteren Hälfte in Abb.24. Dieses Phänomen tritt bei allen untersuchten Werten des Eingangsfeldes auf. Die Abbildungen besitzen jedoch immer ein einfaches Maximum.

Erniedrigt man das Eingangsfeld innerhalb des chaotischen Bereichs, nimmt die Ordnung der resultierenden Abbildungen kontinuierlich zu. Während in Abb.24 ein quadratisches Maximum zu beobachten ist, erhält man in der Nähe der unteren Grenze des chaotischen Bereichs ein Maximum mit höherer Ordnung. Dies ist in Abb.25 dargestellt.

Wie man sieht, ist die Kurve nicht mehr ganz ausgefüllt. Die Maximafolge enthält Teilfolgen mit ausgezeichneten Amplitudenwerten, die aber keine Periodenstruktur erkennen lassen. Solche unterbrochenen Kurvenstücke wurden auch bei der Stroboskopischen Abbildung für einen getriebenen anharmonischen Oszillator beobachtet [89]. Die hohe Ordnung des Maximums ist an der nahezu geraden Form deutlich zu erkennen.

Da die Ordnung z des Maximums durch die Wahl des Eingangsfeldes E_0 bestimmt wird, ist die Feigenbaumkonstante δ , deren Wert von z abhängt (Kap.5.1.2), auch eine Funktion von E_0 : $\delta(z(E_0))$. Die berechnete Koeffizientenfolge δ_n (5.37) in Kap.5.2.2, sowie die quadratische Form des Maximums in Abb.24 zeigen, daß der Wert der Feigenbaumkonstanten an der oberen Grenze des chaotischen Bereichs, wie bei der Logistischen Gleichung, mit $\delta=4.66920..$ gegeben ist. Dieser Wert verändert sich innerhalb des chaotischen Bereichs mit abnehmendem Eingangsfeld.

Insgesamt kann man feststellen, daß die Beschreibung der optischen Bistabilität mit Hilfe der Maxwell-Bloch-Gleichungen in der

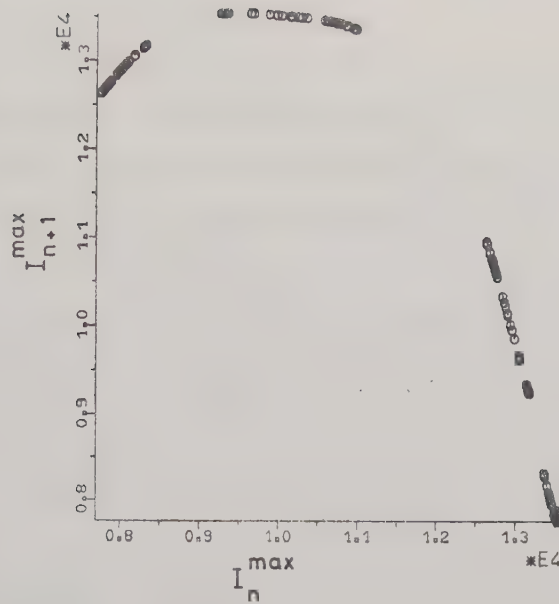


Abbildung 25. : Lorenz-Abbildung der Intensität des elektrischen Feldes $I(t)$ mit einem Maximum hoher Ordnung, für einen Wert $|E| = 75.133$ aus dem chaotischen Bereich. Aufgetragen sind die Werte $I_{\max}^{n+1}$ gegen $I_{\max}^n$. $N=80$ Maximawerte wurden berücksichtigt.

"Mean-Field"-Näherung, bei den gewählten Parametern (5.32), einen Weg zum Chaos aufzeigt, der durch die eindimensionale Lorenz-Abbildung für die Intensität des elektrischen Feldes, eindeutig mit dem Feigenbaumszenarium identifiziert werden kann. Die innerhalb der kontinuierlichen Beschreibung der optischen Bistabilität erzielten Resultate (Kap.5.2.2) werden damit bestätigt.

5.3 DETERMINISTISCHES CHAOS UND FLUKTUATIONEN

Bisher wurde das periodische und chaotische Verhalten bei der optischen Bistabilität mit Hilfe deterministischer Gleichungen beschrieben. Fluktuationen, wie sie in realen Systemen immer gegeben sind, wurden damit vernachlässigt. Die erzielten Resultate bei der Untersuchung der stationären Lösungen (Kap.4.4) lassen jedoch darauf schließen, daß die Fluktuationen auch die zeitlich instabilen Lösungen im oberen Transmissionsast des bistabilen Bereichs wesentlich beeinflussen.

Im folgenden werden daher die Fluktuationen in die theoretische Beschreibung mit einbezogen. Der Zusammenhang zwischen deterministischem Chaos, als einem selbsterzeugten Rauschen des Systems, und dem vorgegebenen externen Rauschen ist bis heute nur unvollständig untersucht. Die vorliegenden Arbeiten beziehen sich vor allem auf das einfachste Beispiel diskreter Abbildungen, die Logistische Gleichung [91,92].

So berechneten Crutchfield und Mitarbeiter [92] den Einfluß von externem Rauschen bei der, gegenüber (5.9) transformierten Logistischen Gleichung, über

$$y_{n+1} = ry_n(1 - y_n) + \sigma \xi_n \quad (5.44).$$

Für y wird der Definitionsbereich $y \in [0,1]$ und für den Parameter r das Intervall $0 \leq r \leq 4$ betrachtet. Mit der Transformation

$y_n = (r/4 - 1/2)x_n + 1/2$ und $\mu = r^2/4 - r/2$ erhält man die in Kap.5.1.2 diskutierte Form (5.9).

Wie bei der Langevin-Gleichung im kontinuierlichen Fall (Kap.3.3.1), wurde eine stochastische Fluktuationskraft ξ addiert, deren statistische Eigenschaften durch eine Gauß-Verteilung:

$$P(\xi) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-\xi^2/2} \text{ und eine } \delta\text{-Korrelation:}$$

$\langle \xi_n \xi_m \rangle = \delta_{n,m}$ gegeben sind. Durch die Wahl des Kopplungsparameters σ wird die Rauschstärke festgelegt.

Bei der numerischen Rechnung wurde das gleiche Verfahren, wie bei der Untersuchung der deterministischen Gleichung (Kap.5.2.1) durchgeführt. Die Fluktuationskräfte ξ_n wurden mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators erzeugt. Die Ergebnisse sind in Abb.26 für einen Wert des Kopplungsparameters $\sigma=10^{-3}$ dargestellt. Zum Vergleich ist das Feigenbaumdiagramm der deterministischen Gleichung ($\sigma=0$) angegeben.

Wie man sieht, besitzt das Feigenbaumdiagramm unter Berücksichtigung von Fluktuationen weniger Feinstruktur. Aus den Linien werden Bänder, deren Breite von der gewählten Rauschstärke bestimmt wird. Die höheren Periodenwerte $p=8,16$ etc. sind bei dem Wert $\sigma=10^{-3}$ nicht mehr vorhanden. Aus dem Periodenwert $p=8$ ergibt sich eine verbreiterte Periode mit $p=4$.

Die Berechnung des Liapunov-Exponenten (5.5) zeigte, daß der Übergang zum Chaos, der im deterministischen Fall bei $r=r_{\infty}$ stattfindet, zu kleineren Werten hin verschoben wird. Das chaotische Verhalten setzt früher ein.

Durch die gute Übereinstimmung der Abbildung der Logistischen Gleichung mit der eindimensionalen Lorenz-Abbildung der Intensität des elektrischen Feldes (Kap.5.2.3), sind ähnliche Resultate bei der optischen Bistabilität zu erwarten.

Ausgehend von den deterministischen Maxwell-Bloch-Gleichungen in der "Mean-Field"-Näherung, führt die Berücksichtigung von Fluktuationen auf die folgenden, stochastischen Langevin-Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_0^{-1} E &= -(E - E_I / \sqrt{T}) + i\theta E - 2CP + \sqrt{Q_E/2} F_E(t) \\ \dot{\gamma}_1^{-1} P &= -(1 + i\Delta)P + ED + \sqrt{Q_P/2} F_P(t) \\ \dot{\gamma}_2^{-1} D &= -D + 1 - \frac{1}{2}(EP^* + E^*P) + \sqrt{Q_D/2} F_D(t) \end{aligned} \quad (5.45):$$

Die gauß'schen Fluktuationskräfte $F_E(t)$, $F_P(t)$ und $F_D(t)$ beschreiben die Intensitätsfluktuationen des einfallenden Lichtfeldes, sowie die thermischen Fluktuationen im Medium. Sie sind δ -korreliert:

$$\langle F_{E,P,D}(t) F_{E,P,D}^*(t') \rangle = 2\delta(t - t') \quad (5.46).$$

Q_E , Q_P und Q_D sind die Diffusionskonstanten des elektrischen Feldes, der Polarisation und der Inversion. Da das Gleichungssystem (5.45) aus gekoppelten Langevin-Gleichungen besteht, werden die Rauschbeiträge sowohl additiv als auch multiplikativ übertragen.

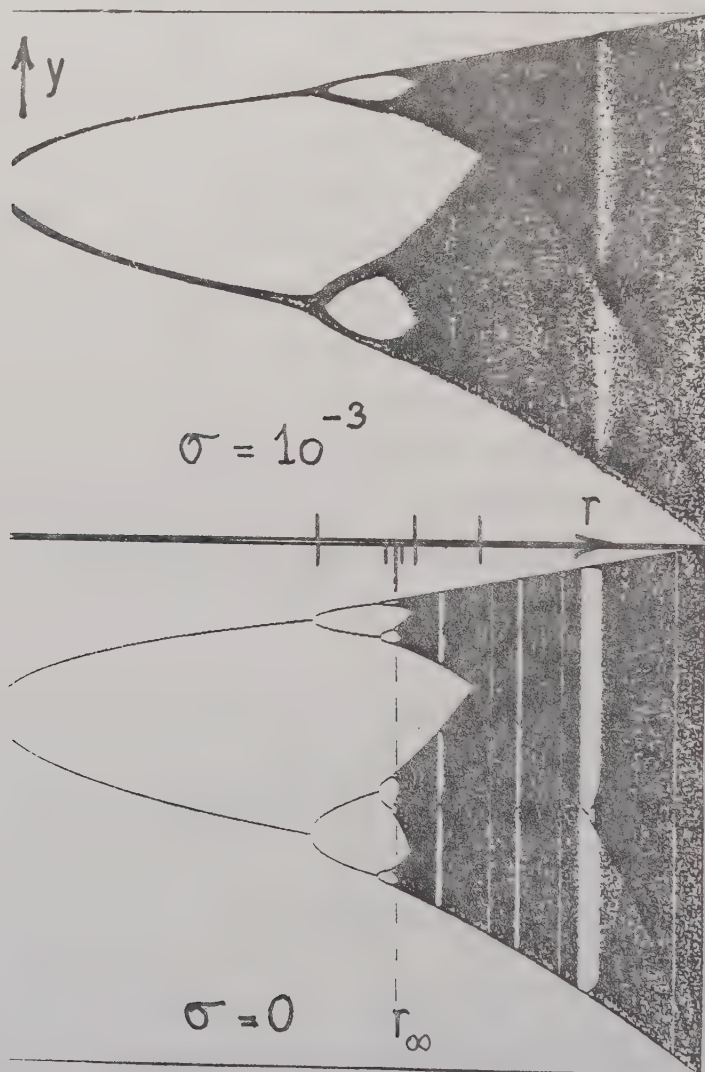


Abbildung 26. : Feigenbaumdiagramm der Logistischen Gleichung (5.44) mit ($\sigma=10^{-3}$) und ohne ($\sigma=0$) Rauschen.

Einen Anhaltspunkt für die Größe der zu wählenden Diffusionskonstanten, bzw. der Rauschstärken, erhält man über das Dissipations-Fluktuations-Theorem (Kap.3.3.1), das allerdings nur im thermischen Gleichgewicht gültig ist. Im stationären Fall können mit

$$Q_{E,P,D} \approx 2\gamma_{o,1,2} \quad (5.47)$$

die, gegenüber der stationären, deterministischen Lösung für das elektrische Feld (5.22), zusätzlich auftretenden Rauschbeiträge in (5.45) grob abgeschätzt werden. Diese liefern ein ungefähres Maß für die gewählte Rauschstärke.

Die Untersuchung des Gleichungssystems (5.45) wurde mit Hilfe einer numerischen Simulationsmethode durchgeführt. Dabei werden die stochastischen Fluktuationskräfte durch den Computer simuliert. Durch Integration der Langevin-Gleichungen erhält man eine Realisierung des zeitlichen Verlaufs der stochastischen Größen. Berücksichtigt man viele solcher Realisierungen, indem man die Integration für viele, unabhängige Realisierungen der Fluktuationskräfte wiederholt, können die gesuchten, gemittelten Größen berechnet werden. Dieses Verfahren wurde beispielsweise bei der Untersuchung der Langevin-Gleichung (4.7), innerhalb der klassisch-statistischen Beschreibung der optischen Bistabilität, erfolgreich angewendet [93].

Bei den stochastischen Maxwell-Bloch-Gleichungen (5.45) werden zunächst, wie im deterministischen Fall, die dynamischen Größen aus ihren stationären Lösungen ausgelenkt und das zeitliche Verhalten der Auslenkungsgrößen berechnet. Zur numerischen Integration werden die Langevin-Gleichungen der Auslenkungsgrößen $\delta E(t)$, $\delta P(t)$ und $\delta D(t)$ diskretisiert:

$$\begin{aligned} \delta E(t+\Delta t) &= \delta E(t) + A \times \Delta t \times X(\delta E(t), \delta P(t), \Delta t) + A \times \sqrt{Q_E \Delta t / 2} \times dF_E \\ \delta P(t+\Delta t) &= \delta P(t) + \Delta t \times Y(\delta E(t), \delta P(t), \delta D(t), \Delta t) + \sqrt{Q_P \Delta t / 2} \times dF_P \\ \delta D(t+\Delta t) &= \delta D(t) + B \times \Delta t \times Z(\delta E(t), \delta P(t), \delta D(t), \Delta t) + B \times \sqrt{Q_D \Delta t / 2} \times dF_D \end{aligned} \quad (5.48),$$

wobei $A \equiv \gamma_0/\gamma_1$ und $B \equiv \gamma_2/\gamma_1$ gesetzt wurde.

Um eine hohe Stabilität der Lösungen zu erzielen, wurden die Driftterme der Langevin-Gleichungen bis zur fünften Ordnung in Δt entwickelt [94]. Diese Entwicklungen sind in (5.48) durch die Funktionen X, Y und Z angegeben. Bei jedem Zeitschritt Δt werden normal verteilte Zufallszahlen dF_E , dF_P und dF_D addiert, die mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators erzeugt werden [95]. Deren Varianz wird durch die vorgegebenen Diffusionskonstanten festgelegt.

Bei der Integration ist darauf zu achten, daß die Zeitschritte Δt hinreichend klein gewählt werden. Darüberhinaus ist die Genauigkeit der Resultate bei der Berechnung der Mittelwerte der stochastischen Größen natürlich von der Zahl der Realisierungen abhängig. Wie sich zeigt, sind nicht mehr als 1000 Realisierungen erforderlich, um stabile Lösungen zu erhalten.

Mit diesem Verfahren wurde der Einfluß von Fluktuationen auf die periodischen Lösungen mit den Periodenwerten $p=1,2$ und 4 (Abb.16) untersucht. Dabei wurden die Rauschstärken variiert. Es wurde wieder eine Vorlaufzeit abgewartet, bis das deterministische System den jeweiligen Grenzzyklus erreicht hat und anschließend das Rauschen dazugeschaltet.

Bei dem größten gewählten Rauschfaktor ($Q_E=1 \times 10^{-4}$, $Q_P=5 \times 10^{-3}$, $Q_D=5 \times 10^{-5}$ (5.49)) erhält man für den zeitlichen Verlauf der gemittelten Intensität des elektrischen Feldes, sowie für das entsprechende Phasenraumbild, die in Abb.27 dargestellten Ergebnisse (gestrichelte Linien) [96]. Zum Vergleich sind die deterministischen Lösungen (durchgezogene Linien) angegeben.

Wie man sieht, relaxiert die Intensität unter dem Einfluß von Fluktuationen bei den Periodenwerten $p=2$ und $p=4$ auf einen stabilen Wert. Die Trajektorien verlassen die Grenzzyklen und erreichen einen Fixpunkt. Die Intensität der Grundperiode zeigt dagegen innerhalb des gesamten Zeitraums oszillatorisches Verhalten. Die Amplituden werden allerdings so stark gedämpft, daß auch hier ein Übergang zu einem stabilen Fixpunkt zu

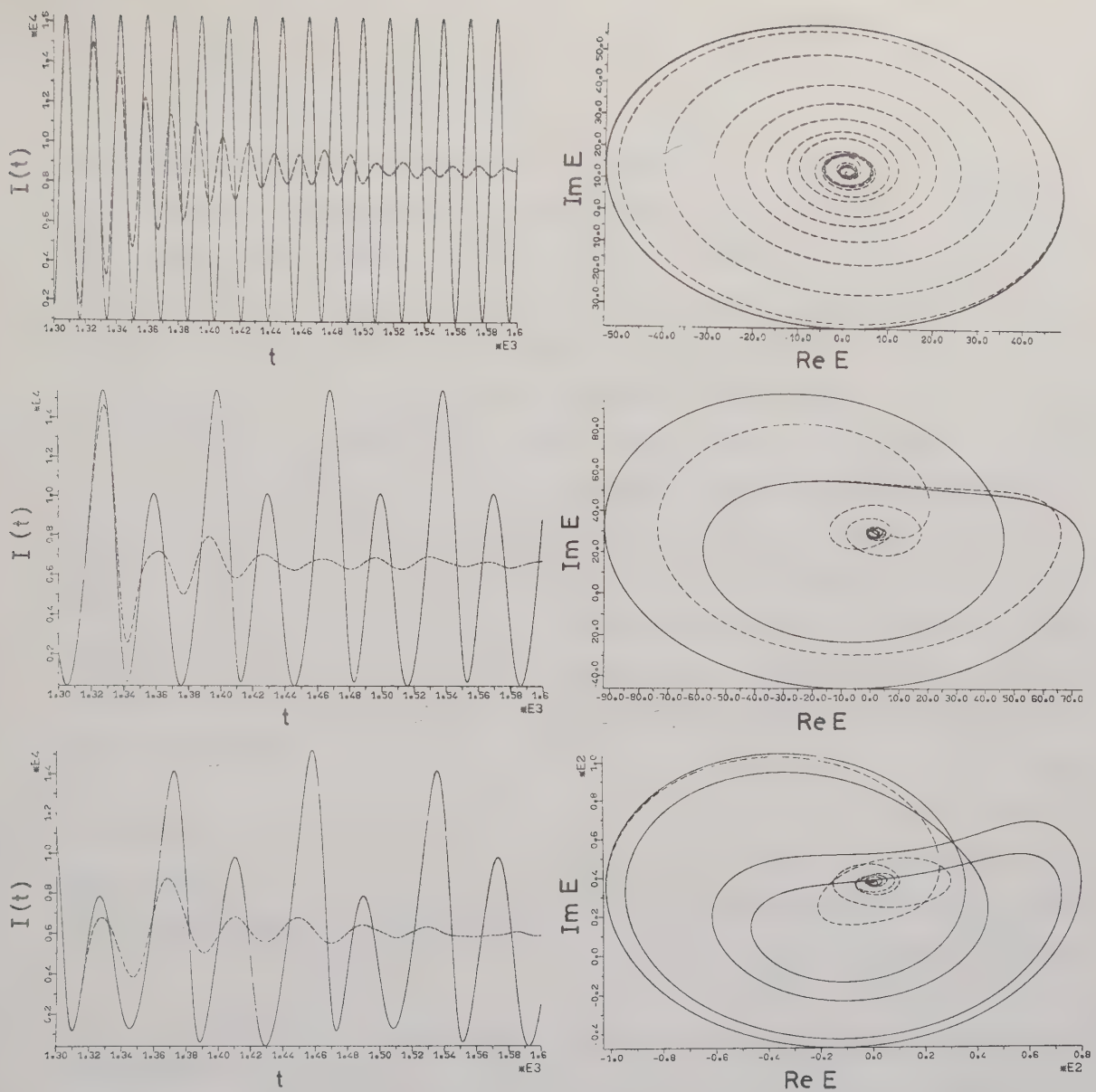


Abbildung 27. : Einfluß von Fluktuationen auf periodische Lösungen. Für die Periodenwerte $p=1,2$ und 4 ist jeweils die über 1000 Realisierungen gemittelte Intensität des elektrischen Feldes $\langle I(t) \rangle$ als Funktion der Zeit t , sowie das entsprechende Phasenraumbild (gestrichelte Linien) für die Rauschstärken $Q_E=1 \times 10^{-4}$, $Q_P=5 \times 10^{-3}$ und $Q_D=5 \times 10^{-5}$ aufgetragen. Zum Vergleich sind die entsprechenden deterministischen Lösungen (durchgezogene Linien) angegeben.

erwarten ist. In Abb.28 ist für die Grundperiode der zeitliche Verlauf der gemittelten Intensität vergrößert dargestellt. Neben der deterministischen Lösung ist zusätzlich eine typische Realisierung der Intensität angegeben.

Auch diese Realisierung oszilliert über den gesamten Zeitraum. Wie man sieht, entsteht durch die Fluktuationen eine Phasenverschiebung gegenüber der deterministischen Lösung. Diese führt dazu, daß bei der Mittelung über alle Realisierungen, die Oszillationen stark gedämpft, bzw. bei den Periodenwerten $p=2$ und $p=4$, fast vollständig eliminiert werden. Der durch die Fluktuationen verursachte Übergang des Systems auf einen stabilen Fixpunkt deutet ein Ordnungsverhalten an, wie es kürzlich von Matsumoto und Tsuda [97] bei der Untersuchung eindimensionaler diskreter Abbildungen diskutiert wurde. Die Realteile der Liapunov-Exponenten werden negativ.

Die stabilen Werte, die die gemittelte Intensität unter der Zeitentwicklung annimmt, sind, durch das Rauschen bedingt, bei allen Periodenwerten größer, als die entsprechenden stationären deterministischen Werte auf dem oberen Transmissionsast (vgl. Abb.14).

Um die Größe des Rauschens genauer angeben zu können, wird, neben der groben Abschätzung über das Dissipations-Fluktuations-Theorem, die mittlere relative Schwankung der Intensität des elektrischen Feldes über

$$G_{rel} = \left[\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(I_{Real,i}(t_j) - I_{det}(t_j))^2}{I_{det}^2(t_j)} \right) \right]^{1/2} \quad (5.50)$$

berechnet. Dabei werden die Abstände zwischen den Werten der Intensität der einzelnen Realisierungen und der deterministischen Lösung bei jedem Zeitschritt t_j bestimmt und über alle Realisierungen i und Zeitschritte t_j gemittelt.

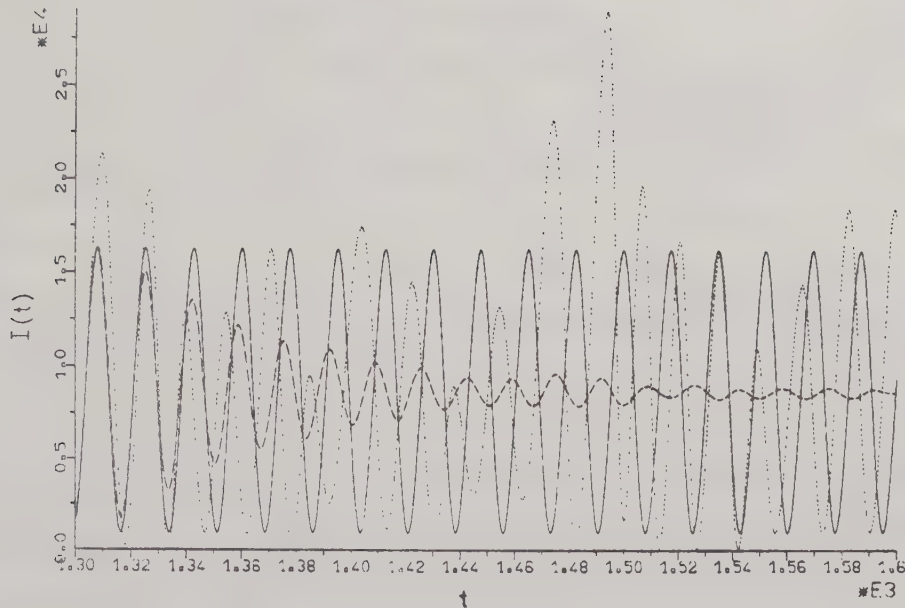


Abbildung 28. : Vergrößerte Darstellung der Grundperiode mit $p=1$ aus Abb.27. Neben der gemittelten Intensität des elektrischen Feldes $\langle I(t) \rangle$ (—) und der deterministischen Lösung (---) ist zusätzlich eine typische Realisierung der Intensität (.....) als Funktion der Zeit t angegeben.

Da die deterministischen Lösungen oszillatorischen Charakter haben und in den einzelnen Realisierungen Phasenverschiebungen auftreten, führt die Berechnung von (5.50), anhand der Ergebnisse in Abb.27 und Abb.28, zu einer Überschätzung des tatsächlichen Rauschfaktors. Dies ist in Abb.28 deutlich zu erkennen.

Führt man dagegen dieselbe Simulationsrechnung, unter Beibehaltung sämtlicher Parameterwerte, ohne Auslenkung der dynamischen Größen aus den stationären Lösungen durch, ergibt sich ein zeitlich konstanter Wert für

die deterministische Intensität. Aus den Abweichungen der einzelnen Realisierungen von diesem Wert kann damit die mittlere relative Schwankung der Intensität des elektrischen Feldes über (5.50) eindeutig berechnet werden.

Da der Rauschfaktor von der gewählten Eingangsintensität abhängt, erhält man für die Periodenwerte $p=1,2$ und 4 in Abb.27 kein einheitliches Ergebnis. Die Unterschiede sind jedoch so gering, daß für alle Periodenwerte der Wert $\sigma_{\text{rel}} \approx 2 \times 10^{-1}$ angegeben werden kann. Der Rauschfaktor ist demnach relativ groß.

Erniedrigt man die Werte für die Diffusionskonstanten (5.49), ergeben sich die in Abb.29 und Abb.30 dargestellten Resultate.

In Abb.29 erhält man, durch die Berechnung von (5.50), mit Hilfe des geschilderten Verfahrens, den Wert $\sigma_{\text{rel}} \approx 7 \times 10^{-2}$.

Anstelle der Fixpunkte in Abb.27 ist bei allen Periodenwerten ein verbreiteter Grenzyklus mit dem Periodenwert $p=1$ zu beobachten. Die Dämpfung der Amplituden der Intensität ist durch den kleineren Rauschfaktor geringer geworden.

In Abb.30 ist das Rauschen mit $\sigma_{\text{rel}} \approx 2 \times 10^{-2}$ schon verhältnismäßig klein. Bei diesem Wert tritt neben der leicht verbreiterten Grundperiode auch der Periodenwert $p=2$ auf. Der Einfluß der Fluktuationen bewirkt jedoch auch hier, daß der höhere Periodenwert $p=4$ verschwindet. Ähnlich wie bei der Logistischen Gleichung, ergibt sich stattdessen eine stark verbreiterte Periode mit $p=2$.

Erst bei dem Wert $\sigma_{\text{rel}} \approx 7 \times 10^{-3}$ bleibt auch der Periodenwert $p=4$ erhalten. Dies ist in Abb.31 dargestellt.

Wie man sieht, sind die Abweichungen von der deterministischen Lösung nur noch gering.

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, wie bei der Untersuchung der Logistischen Gleichung, daß vor allem die höheren Periodenwerte sehr emp-

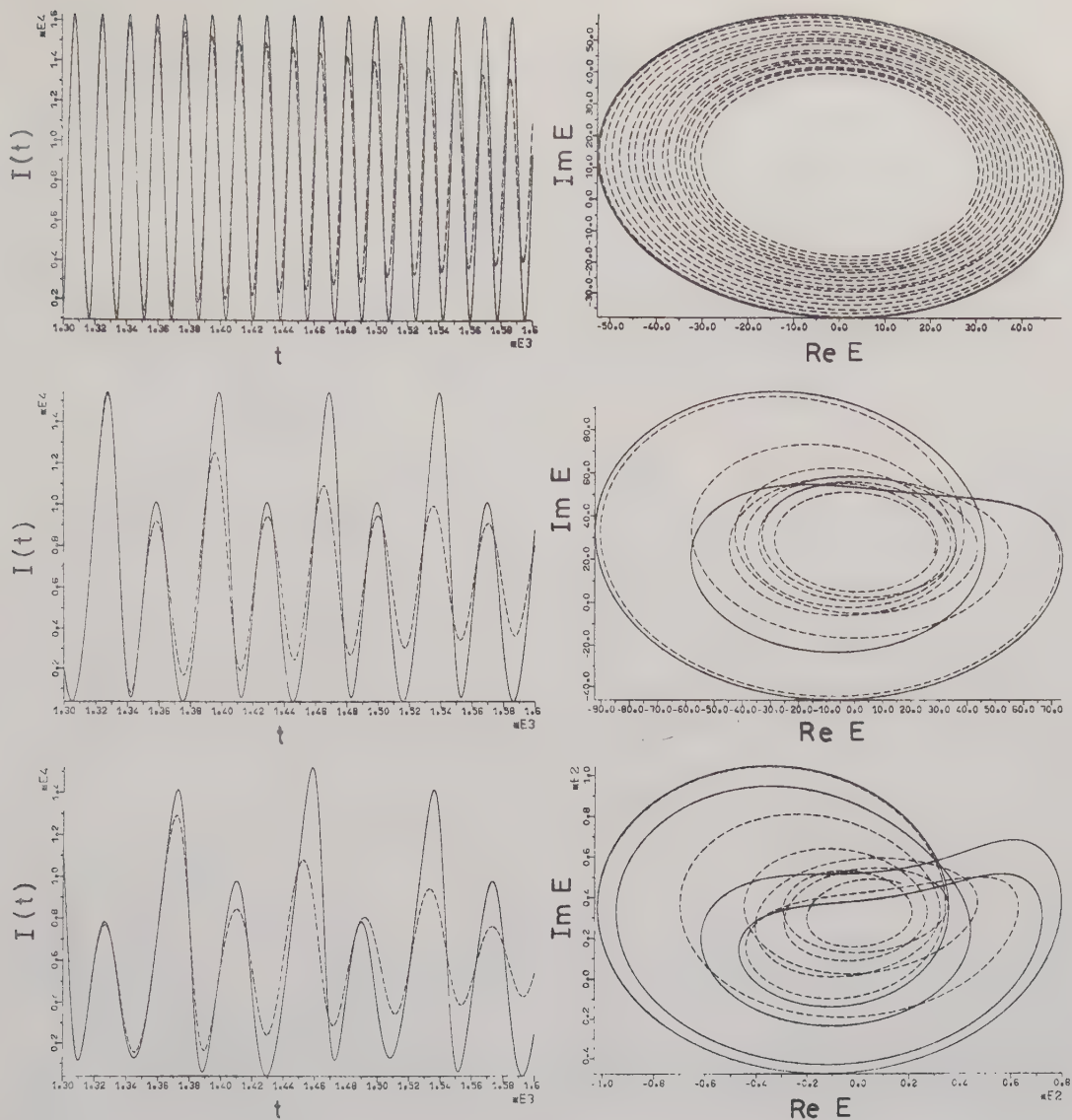


Abbildung 29. : Einfluß von Fluktuationen auf periodische Lösungen. Für die Periodenwerte $p=1,2$ und 4 ist jeweils die über 1000 Realisierungen gemittelte Intensität des elektrischen Feldes $\langle I(t) \rangle$ als Funktion der Zeit t , sowie das entsprechende Phasenraumbild (gestrichelte Linien) für die Rauschstärken $Q_E=1 \times 10^{-5}$, $Q_P=5 \times 10^{-4}$ und $Q_D=5 \times 10^{-6}$ aufgetragen. Zum Vergleich sind die entsprechenden deterministischen Lösungen (durchgezogene Linien) angegeben.

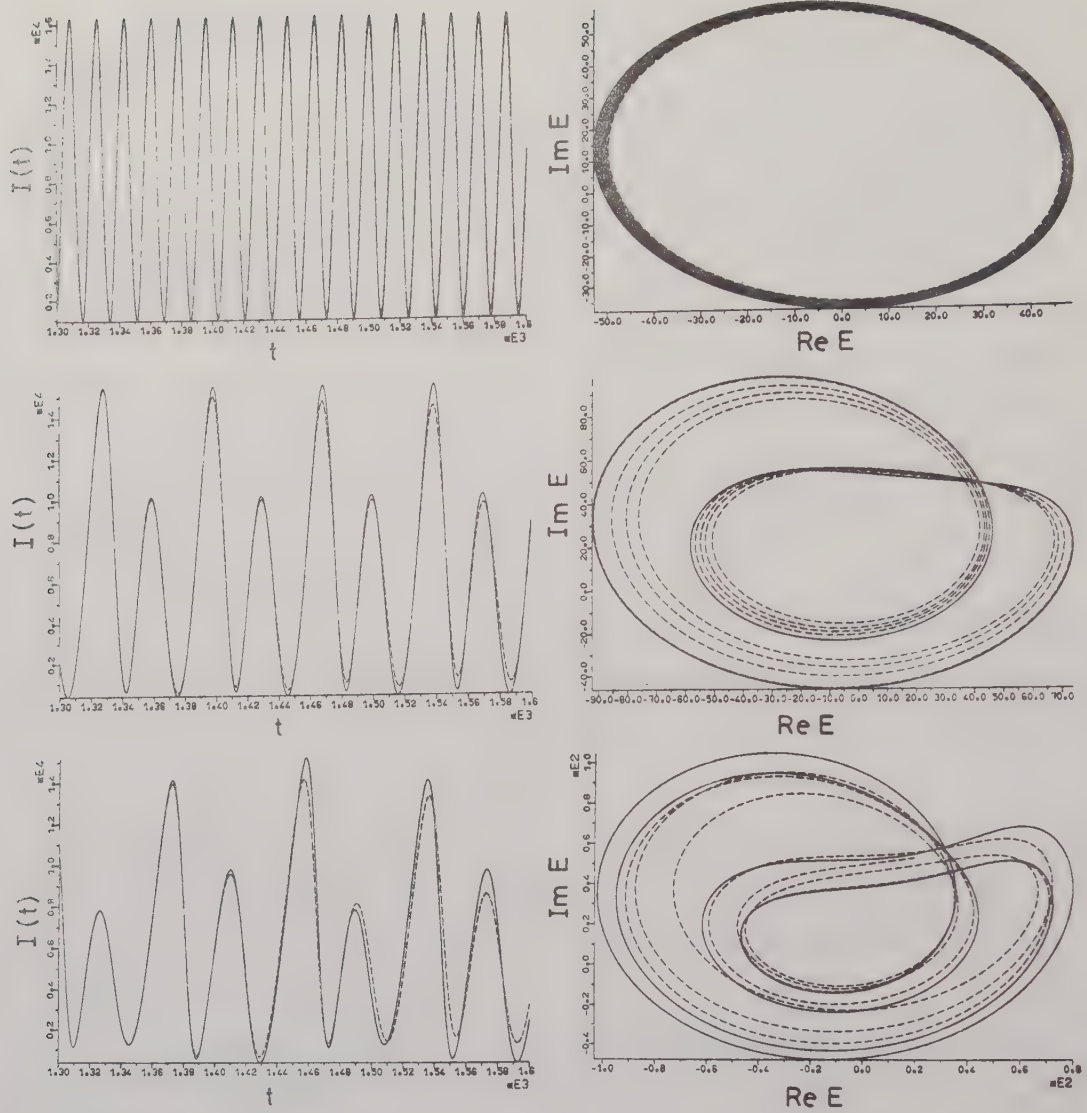


Abbildung 30. : Einfluß von Fluktuationen auf periodische Lösungen. Für die Periodenwerte $p=1,2$ und 4 ist jeweils die über 1000 Realisierungen gemittelte Intensität des elektrischen Feldes $\langle I(t) \rangle$ als Funktion der Zeit t , sowie das entsprechende Phasenraumbild (gestrichelte Linien) für die Rauschstärken $Q_E=1 \times 10^{-6}$, $Q_P=5 \times 10^{-5}$ und $Q_D=5 \times 10^{-7}$ aufgetragen. Zum Vergleich sind die entsprechenden deterministischen Lösungen (durchgezogene Linien) angegeben.

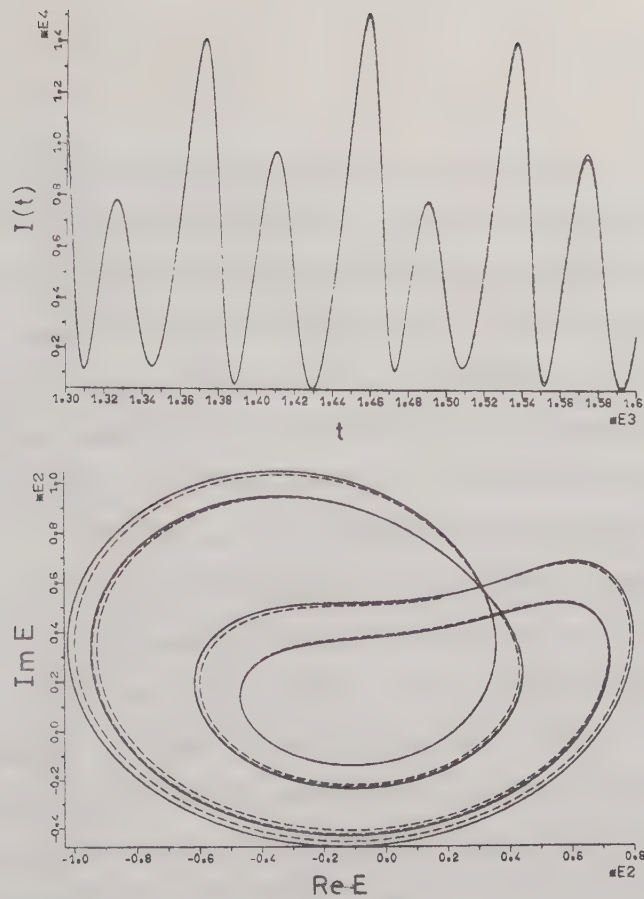


Abbildung 31. : Einfluß von Fluktuationen auf periodische Lösungen. Für den Periodenwert $p=4$ ist die über 1000 Realisierungen gemittelte Intensität des elektrischen Feldes $\langle I(t) \rangle$ als Funktion der Zeit t , sowie das entsprechende Phasenraumbild (gestrichelte Linien) für die Rauschstärken $Q_E=1 \times 10^{-7}$, $Q_P=5 \times 10^{-6}$ und $Q_D=5 \times 10^{-8}$ aufgetragen. Zum Vergleich sind die entsprechenden deterministischen Lösungen (durchgezogene Linien) angegeben.

findlich auf äußere Störungen reagieren. Selbst bei einem Rauschfaktor von nur 2%, wie in Abb.30, geht die Struktur des Periodenwertes $p=4$ verloren. Der Energietransport auf die Nachbarmoden, der, wie in Abb.22 dargestellt, zu den Periodenverdopplungen führt, wird durch den Einfluß der Fluktuationen überdeckt. Damit bleiben in Abb.29 nur die Grundperiode, in Abb.30 nur die Periodenwerte $p=1$ und $p=2$ erhalten.

Die auftretende Verbreiterung der Grenzzyklen entspricht den Bändern bei der Logistischen Gleichung und ist ein Maß für die gewählte Rauschstärke. Bei großen Rauschstärken, wie in Abb.27, ist diese Verbreiterung nicht mehr zu beobachten. Hier findet ein Übergang von einem Grenzzyklus auf einen stabilen Fixpunkt statt. Die Intensität nimmt einen Wert auf dem oberen Transmissionsast an. Diese qualitative Änderung des zeitlichen Verlaufs der Intensität kann als ein, durch Rauschen induziertes Ordnungsverhalten des Systems interpretiert werden [97].

Die Frage, inwieweit sich dieses Ordnungsverhalten, auch bei kleineren Rauschstärken, auf die chaotischen Lösungen überträgt, konnte allerdings nicht beantwortet werden. Dazu müßte der zeitliche Verlauf der Intensität, für die Werte des Eingangsfeldes aus dem Übergangsgebiet zwischen periodischen und chaotischen Lösungen berechnet werden, was einen wesentlich größeren Untersuchungszeitraum, als den in Abb.27-31 angegebenen, erfordert. Der ohnehin schon relativ hohe Rechenzeitaufwand wäre dann nicht mehr zu vertreten.

Der aufgezeigte Zusammenhang zwischen der Lorenz-Abbildung der Intensität des elektrischen Feldes und der Abbildung der Logistischen Gleichung, läßt jedoch darauf schließen, daß auch bei der optischen Bistabilität chaotisches Verhalten unter dem Einfluß von Fluktuationen früher einsetzt. Darüberhinaus zeigt das bereits erwähnte, bisher einzige vorliegende, rein optische Experiment zur optischen Bistabilität, bei dem periodisches und chaotisches Verhalten beobachtet wurde [24], daß auch unter realen Bedingungen, d.h. mit Rauschen, chaotisches Verhalten auftreten kann.

Obwohl dieses Experiment bei einer großen Resonatorlänge durchgeführt wurde und damit den Bedingungen der "Mean-Field"-Näherung nicht genügt, konnten auch hier keine höheren Periodenwerte beobachtet werden. Wie in Abb.30, ergaben sich lediglich die Periodenwerte $p=1$ und $p=2$. Da das Rauschen vor allem durch die Intensitätsfluktuationen des einfallenden Lichtfeldes verursacht wird, ist der experimentelle Nachweis höherer Pe-

riodenwerte mit der Verwendung eines ausreichend intensitätsstabilisierten Lichtfeldes verbunden. Dies zeigen die theoretischen Ergebnisse. Neben dem rein optischen Experiment, konnte das Auftreten von periodischem und chaotischem Verhalten auch bei der elektro-optischen und akusto-optischen Bistabilität experimentell nachgewiesen werden.

Bei diesen sogenannten Hybrid-Systemen wird die Nichtlinearität des Mediums künstlich von außen erzeugt. Dies geschieht bei dem elektro-optischen Verfahren [98] über eine Spannung, die an einen elektro-optischen Kristall angelegt wird und den Brechungsindex dieses Kristalls ändert. Variiert man die Spannung proportional zur transmittierten Lichtintensität, ergibt sich ein intensitätsabhängiger Brechungsindex, der zu bistabilem Verhalten führt.

Bei der akusto-optischen Bistabilität [99] wird der intensitätsabhängige Brechungsindex durch ein Schallfeld erzeugt, das an einen akusto-optischen Kristall angelegt wird und ebenfalls über die transmittierte Lichtintensität gesteuert wird.

Sowohl bei den beiden elektro-optischen [100,101], als auch bei dem akusto-optischen Experiment [102], konnten keine höheren Periodenwerte als $p=4$ beobachtet werden. Durch Variation des Eingangsfeldes ergeben sich nach dem Periodenwert $p=4$ sofort chaotische Lösungen.

Für die akusto-optische Bistabilität wurde kürzlich von Chrostowski [103] der Einfluß von Fluktuationen mit Hilfe einer eindimensionalen Abbildung berechnet. Die Ergebnisse stehen in qualitativer Übereinstimmung zu den hier vorgestellten Resultaten.

Insgesamt kann man feststellen, daß der Einfluß von Fluktuationen sowohl bei den statischen, als auch bei den dynamischen Phänomenen der optischen Bistabilität, die in dieser Arbeit behandelt wurden, zu einer qualitativen Veränderung der Ergebnisse führt. Die Berücksichtigung dieser Fluktuationen in der theoretischen Beschreibung ist daher zum besseren

Verständnis der realen physikalischen Vorgänge unbedingt erforderlich.
Dies haben die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit gezeigt.

A REKURSIONSFORMELN DER VERALLGEMEINERTEN LAGUERRE-POLYNOME

Die verallgemeinerten Laguerre-Polynome $L_n^\beta(y)$, die in Kap.4.3 verwendet wurden, genügen verschiedenen Rekursionsformeln [39]. Zur Entwicklung der Gleichung (4.22) für die Entwicklungskoeffizienten c_n^β wurden folgende Relationen verwendet:

$$\frac{d}{dy} \left(e^{-y} y^{(\beta+1)/2} L_m^{\beta+1} \right) = (m+1) e^{-y} y^{(\beta+1)/2} L_{m+1}^\beta \quad (A1.1)$$

$$\frac{d}{dy} L_m^{\beta-1} = - L_{m-1}^\beta \quad (A1.2).$$

Die Anwendung von (A1.1) und (A1.2) ermöglicht es, die Terme in (4.20), die proportional zu $L_m^{|\beta \pm 1|}$ sind durch Laguerre-Polynome mit dem Index β auszudrücken. Dabei kann der in (4.20) auftretende Faktor $\sqrt{y}$ eliminiert werden.

Nachdem der obere Index der Laguerre-Polynome durch diese Prozedur in allen Termen dieselbe Ordnung aufweist, können die Ableitungen von L_m^β und die Produkte der Form $y^n L_m^\beta$ durch Laguerre-Polynome mit einem verschobenen unteren Index ersetzt werden. Dies geschieht mit Hilfe der folgenden Rekursionsformeln:

$$y \frac{d}{dy} L_m^\beta = m L_m^\beta - (m+\beta) L_{m-1}^\beta \quad (A1.3)$$

$$(y - 2m - \beta - 1) L_m^\beta + (m+1) L_{m+1}^\beta + (m+\beta) L_{m-1}^\beta = 0 \quad (A1.4).$$

Damit erhält man eine Gleichung, in der ausschließlich Terme vorkommen, die proportional zu $e^{-y} y^{\beta/2} L_m^\beta$ sind. Durch Multiplikation mit $y^{\beta/2} L_n^\beta$, Integration über y und Berücksichtigung der Orthogonalitätsrelationen (4.14) ergibt sich schließlich Gleichung (4.22) für die Entwicklungskoeffizienten c_n^β .

*B MATRIXELEMENTE DER MATRIZEN P, Q UND R
DES MATRIX-KETTENBRUCH-VERFAHRENS*

Zur numerischen Berechnung der tridiagonalen Vektor-Relation (4.24) wurden alle Elemente des Spaltenvektors (4.23) in Real- und Imaginärteil zerlegt. In dieser Notation ergeben sich für die Matrizen P, Q und R die folgenden Matrixelemente:

$$P_n^{4\beta+3, 4\beta+1} = P_n^{4\beta+4, 4\beta+2} = \alpha\omega''(2n + \beta + 2)(4n + \beta + 2),$$

$$P_n^{4\beta+3, 4\beta+2} = -P_n^{4\beta+4, 4\beta+1} = -\alpha\beta(2n + \beta + 2);$$

$$Q_n^{4\beta+1, 4\beta+1} = Q_n^{4\beta+2, 4\beta+2} = -(\kappa + \alpha\omega'')(4n + \beta) - \alpha\omega''(12n(2n + \beta) + \beta^2),$$

$$Q_n^{4\beta+1, 4\beta+2} = -Q_n^{4\beta+2, 4\beta+1} = \beta(\Delta + \alpha(4n + \beta + 1)),$$

$$Q_n^{4\beta+1, 4\beta+3} = Q_n^{4\beta+2, 4\beta+4} = \alpha\omega''(2n + \beta + 1)(4n + \beta),$$

$$Q_n^{4\beta+1, 4\beta+4} = -Q_n^{4\beta+2, 4\beta+3} = -\alpha\beta(2n + \beta + 1),$$

$$Q_n^{4\beta+3, 4\beta+1} = Q_n^{4\beta+4, 4\beta+2} = (2n + 1)[2\kappa + 4\alpha\omega'' + 3\alpha\omega''(4n + \beta) - 1/\alpha],$$

$$Q_n^{4\beta+3, 4\beta+2} = -Q_n^{4\beta+4, 4\beta+1} = -\alpha\beta(2n + 1),$$

$$Q_n^{4\beta+3, 4\beta+3} = Q_n^{4\beta+4, 4\beta+4} =$$

$$-(\kappa + \alpha\omega'')(4n + \beta + 2) - \alpha\omega''(6(2n + 1)(2n + \beta + 1) + \beta^2),$$

$$Q_n^{4\beta+3, 4\beta+4} = -Q_n^{4\beta+4, 4\beta+3} = \beta(\Delta + \alpha(4n + \beta + 3)),$$

$$Q_n^{4\beta+1, 4\beta-3} = Q_n^{4\beta+2, 4\beta-2} = Q_n^{4\beta+3, 4\beta-1} = Q_n^{4\beta+4, 4\beta} = \kappa\varepsilon_1/\sqrt{\alpha};$$

für $\beta = 0$:

$$Q_n^{4\beta+1, 4\beta-3} = Q_n^{4\beta+2, 4\beta-2} = Q_n^{4\beta+3, 4\beta-1} = Q_n^{4\beta+4, 4\beta} = 0;$$

$$Q_n^{4\beta+3, 4\beta+5} = Q_n^{4\beta+4, 4\beta+6} = -(2n+1)\kappa\varepsilon_i/\sqrt{\alpha};$$

a) für $\beta = 0$:

$$Q_n^{4\beta+3, 4\beta+5} = -2(2n+1)\kappa\varepsilon_i/\sqrt{\alpha},$$

$$Q_n^{4\beta+4, 4\beta+6} = 0;$$

b) für $\beta = B$:

$$Q_n^{4\beta+3, 4\beta+5} = Q_n^{4\beta+4, 4\beta+6} = 0;$$

$$R_n^{4\beta+1, 4\beta+1} = R_n^{4\beta+2, 4\beta+2} = 4n\alpha\omega''(1-2n),$$

$$R_n^{4\beta+1, 4\beta+3} = R_n^{4\beta+2, 4\beta+4} = 2n[2\kappa + 4\alpha\omega'' + 3\alpha\omega''(4n + \beta - 2) - 1/\alpha],$$

$$R_n^{4\beta+1, 4\beta+4} = -R_n^{4\beta+2, 4\beta+3} = -2n\beta\alpha,$$

$$R_n^{4\beta+3, 4\beta+3} = R_n^{4\beta+4, 4\beta+4} = -4n\alpha\omega''(2n+1),$$

$$R_n^{4\beta+1, 4\beta+7} = R_n^{4\beta+2, 4\beta+8} = -2n\kappa\varepsilon_i/\sqrt{\alpha};$$

a) für $\beta = 0$:

$$R_n^{4\beta+1, 4\beta+7} = -4n\kappa\varepsilon_i/\sqrt{\alpha},$$

$$R_n^{4\beta+2, 4\beta+8} = 0;$$

b) für $\beta = B$:

$$R_n^{4\beta+1, 4\beta+7} = R_n^{4\beta+2, 4\beta+8} = 0.$$

- [1] P.A. Franken, A.E. Hill, C.W. Peters
und G. Weinreich, Phys. Rev. Lett. 7, 118 (1961)

- [2] Laser Spectroscopy IV, Springer Series in
Optical Sciences, Vol.21, Ed.: L.A. Schawlow,
Springer-Verlag, Berlin 1979
H.M. Gibbs, S.L. Mc Call und T.N.C. Venkatesan,
Optical Engineering, Vol.19, 463 (1980)
Optical Bistability, Ed.: C.M. Bowden, M. Ciftan
und H.R. Roll, Plenum Press, New-York 1981
E. Abraham und S.D. Smith, Rep. Prog. Phys. 45, 815 (1982)
Quantum Optics, Lecture Notes in Physics, Vol.155,
Ed.: C.A. Engelhardt, Springer-Verlag, Berlin 1982
Dissipative Systems in Quantum Optics, Topics in
Current Physics, Vol.27, Ed.: R. Bonifacio,
Springer-Verlag, Berlin 1982
D.A.B. Miller, Laser Focus, 79 (1982)
L.A. Lugiato, Contemp. Phys. 24, 317 (1983)

- [3] H. Haug, Nonlinear Optical Phenomena
and Bistability in Semiconductors
in: Festkörperprobleme (Advances in Solid State
Physics), Vol.XXII, 149, Ed.: J. Treusch,
Vieweg, Braunschweig 1982

- [4] H. Haken, Synergetics, an Introduction,
Berlin, Springer-Verlag 1977

- [5] G. Nicolis, I. Prigogine, Self-Organization
in Non-Equilibrium Systems, New York, Wiley 1977
- [6] O. Madelung, Festkörpertheorie II,
Berlin, Springer-Verlag 1972
- [7] M. Born und E. Wolf, Principles of Optics,
Oxford, Pergamon 1965
- [8] F.S. Felber und J.H. Marburger,
Appl. Phys. Lett. 28, 731 (1976)
- [9] D.A.B. Miller, S.D. Smith und A. Johnston,
Appl. Phys. Lett. 35, 658 (1979)
- [10] A. Szöke, V. Daneu, J. Goldhar und N.A. Kurnit,
Appl. Phys. Lett. 15, 376 (1969)
- [11] J.W. Austin und L.G. De Shazer,
J. Opt. Soc. Am. 61, 650 (1971)
E. Spiller, J. Opt. Soc. Am. 61, 669 (1971)
- [12] H.M. Gibbs, S.L. Mc Call und
T.N.C. Venkatesan, Phys. Rev. Lett. 36, 1135 (1976)
- [13] S.L. Mc Call, Phys. Rev. A9, 1515 (1974)
- [14] H.M. Gibbs, S.S. Tarng, J.L. Jewell,
D.A. Weinberger und K. Tai, A.C. Gossard, S.L. Mc Call,
A. Passner und W. Wiegmann, Appl. Phys. Lett. 41,
221 (1982)

- [15] P. Meystre, Opt. Commun. 26, 277 (1978)
R. Bonifacio und L.A. Lugiato, Lett. Nuovo Cim. 21,
505 (1978)

- [16] R. Bonifacio und L.A. Lugiato in: Coherence
and Quantum Optics IV, Ed.: L. Mandel und E. Wolf,
Plenum Publishing Co., New York 1977
R. Bonifacio und L.A. Lugiato,
Opt. Commun. 19, 172 (1976)
R. Bonifacio und L.A. Lugiato, Phys. Rev. A18,
1129 (1978)

- [17] R. Roy und M.S. Zubairy, Opt. Commun. 32,
163 (1980)
E. Abraham, S.S. Hassan und R.K. Bullough,
Opt. Commun. 33, 93 (1980)
H.J. Carmichael und J.A. Hermann, Z. Physik B38,
365 (1980)

- [18] H.J. Carmichael, Optica Acta 27, 147 (1980)

- [19] H. Haken, Handbuch der Physik, Vol.XXV/2c,
Ed.: S. Flügge, Berlin, Springer-Verlag 1970
G.L. Lamb, Jr., Rev. Mod. Phys. 43, 99 (1971)

- [20] M. Sargent III, M.O. Scully und W.E. Lamb, Jr.,
Laser Physics, Addison-Wesley Publishing Co.,
London 1974

- [21] E. Abraham, R.K. Bullough und S.S. Hassan,
Opt. Commun. 28, 109 (1979)
E. Abraham und S.S. Hassan,
Opt. Commun. 35, 291 (1980)

- [22] K. Ikeda, Opt. Commun. 30, 257 (1979)
K. Ikeda und H. Daido, Phys. Rev. Lett. 45, 709 (1980)

- [23] R. Bonifacio, M. Gronchi und L.A. Lugiato
in: Optical Bistability, Ed.: C.M. Bowden, M. Ciftan
und H.R. Robl, Plenum Press, New York 1981

- [24] H. Nakatsuka, S. Asaka, H. Itoh, K. Ikeda
und M. Matsouka, Phys. Rev. Lett. 50, 109 (1983)

- [25] W.H. Louisell, Quantum Statistical Properties
of Radiation, J. Wiley & Sons, New York 1973

- [26] H. Risken, The Fokker Planck Equation,
Springer Series of Synergetics, Ed.: H. Haken,
Vol. 18, Berlin, Springer-Verlag 1982

- [27] A. Miller, D.A.B. Miller und S.D. Smith,
Advances in Physics 30, 697 (1981)
P.W. Smith, The Bell System Tech.
J. 61, 1975 (1982)

- [28] H.M. Gibbs, S.L. Mc Call und
T.N.C. Venkatesan, A.C. Gossard, A. Passner
und W. Wiegman, Appl. Phys. Lett. 35, 451 (1979)
A.K. Kar, J.G.H. Mathew, S.D. Smith, B. Davis
und W. Prettl, Appl. Phys. Lett. 42, 334 (1983)
H. Rossmann, F. Henneberger und J. Voigt,
phys. stat. sol. (b)115, K63 (1983)

- [29] E. Hanamura und H. Haug,
Phys. Reports 33C, 209 (1977)

- [30] H. Haug, R. März und S. Schmitt-Rink,
Phys. Lett. 77A, 287 (1980)
R. März, S. Schmitt-Rink und H. Haug,
Z. Physik B40, 9 (1980) zusammen mit
Erratum ibid. B41, 187 (1981)
H. Haug, S.W. Koch, R. März und S. Schmitt-Rink,
J. Lumin. 24/25, 621 (1981)
S. Schmitt-Rink und H. Haug, phys. stat. sol. (b)108,
377 (1981)

- [31] T. Itoh und T. Suzuki, J. Phys. Soc. Jpn. 45,
1939 (1978)
B. Hönerlage, R. Levy und J. B. Grun,
Opt. Commun. 43, 443 (1982)

- [32] G. Kurtze, W. Maier, G. Blattner
und C. Klingshirn, Z. Physik B39, 95 (1980)

- [33] S.W. Koch und H. Haug, Phys. Rev. Lett.
46, 450 (1981)

- [34] E. Hanamura, Solid State Commun. 38, 939 (1981)

- [35] R. Levy, J.Y. Bigot, B. Hönerlage,
 F. Tomasini und J.B. Grun, wird veröffentlicht
 N. Peyghambarian, H.M. Gibbs, M.C. Rushford
 und D.A. Weinberger, wird veröffentlicht

- [36] R. Loudon, J. Phys. A3, 233 (1970)

- [37] H. Risken und H.D. Vollmer,
 Z. Physik B39, 89 (1980)

- [38] H. Risken und H.D. Vollmer
 Z. Physik B39, 339 (1980)

- [39] W. Magnus, F. Oberhettinger und R. Soni
 Formulas and Theorems for Special Functions of
 Mathematical Physics, Berlin, Springer-Verlag 1976

- [40] L. Prigogine, Nonequilibrium Statistical
 Mechanics, New York, J. Wiley 1962

- [41] R. Graham und A. Schenzle, Phys. Rev. A23, 1302 (1981)

- [42] H.R. Schwarz, H. Rutishauser und E. Stiefel,
 Matrizen-Numerik, Stuttgart, B.G. Teubner 1968
 A. Björck und G. Dahlquist, Numerische Methoden,
 München-Wien, R. Oldenbourg Verlag 1979

- [43] F. Stummel, K. Hainer, Praktische Mathematik,
 Stuttgart, B.G. Teubner 1971

- [44] H. Haug, S.W. Koch, R. Neumann und
H.E. Schmidt, Z. Physik B49, 79 (1982)

- [45] W. Martienssen, Einführung in die Physik III
- Thermodynamik, Hrg.: H. Wolter, Akademische
Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main 1972

- [46] A. Schenzle und H. Brand, Opt. Commun. 31, 401 (1979)

- [47] R. Bonifacio und L.A. Lugiato,
Phys. Rev. Lett. 40, 1023 (1978)

- [48] H. Paul, Rev. Mod. Phys. 54, 1061 (1982)

- [49] R.J. Glauber, Quantum Optics and Electronics,
Ed.: de Witt, Blandin, Cohen-Tanoudji, Les Houches 1964

- [50] D.F. Walls, Nature 280, 451 (1979)

- [51] R. Hanbury-Brown und R.W. Twiss,
Proc. Roy. Soc. A243, 291 (1957)

- [52] H.J. Kimble, M. Dagenais und L. Mandel,
Phys. Rev. Lett. 39, 691 (1977)
M. Dagenais und L. Mandel, Phys. Rev. A18, 2217 (1978)

- [53] D. Stoler, Phys. Rev. Lett. 33, 1397 (1974)

- [54] J. Mostowski und K. Rzazewski,
Phys. Lett. 66A, 275 (1978)

- [55] J. Perina, V. Perinova und L. Knesel,
Acta Phys. Polonica A51, 725 (1977)
- [56] L. Mista, V. Perinova, J. Perina und
Z. Braunerova, Acta Phys. Polonica A51, 739 (1977)
- [57] M.S. Zubairy und J.J. Yeh,
Phys. Rev. A21, 1624 (1980)
- [58] H.D. Simaan und R. Loudon,
J. Phys. A11, 435 (1978)
- [59] R. Neumann, Z. Physik B44, 241 (1981)
- [60] V. Perinova, Optica Acta 28, 747 (1981)
V. Perinova und J. Perina, Optica Acta 28, 769 (1981)
- [61] P.D. Drummond und D.F. Walls,
J. Phys. A13, 725 (1980)
- [62] E.N. Lorenz, J. Atoms. Sci. 20, 130 (1963)
- [63] M.J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19, 25 (1978)
M.J. Feigenbaum, J. Stat. Phys. 21, 669 (1979)
- [64] M. Peixoto, Topology 1, 101 (1962)
- [65] P. Collet und J.P. Eckmann, Iterated Maps on the
Interval as Dynamical Systems, Progress in
Physics, 1, Birkhäuser, Basel 1980

- [66] H.G. Schuster, private Mitteilung

- [67] S. Newhouse, D. Ruelle und F. Takens,
Comm. Math. Phys. 64, 35 (1978)

- [68] J. Guckenheimer, A Brief Introduction to
Dynamical Systems,
Lectures in Appl. Math. 17, (1979)

- [69] V.I. Arnold und A. Avez, Ergodic Problems
of Classical Mechanics,
W.A. Benjamin Inc., New York, Amsterdam 1968

- [70] Lord Rayleigh, Phil. Mag. 32, 529 (1916)

- [71] Y. Pomeau und P. Manneville,
Comm. Math. Phys. 77, 189 (1980)
P. Manneville und Y. Pomeau, Physica D1, 219 (1980)

- [72] H. Haken, Chaos and Order in Nature,
Springer-Series in Synergetics Vol.11,
Springer-Verlag, Berlin 1981

- [73] H. Haken, Evolution of Order and Chaos,
Springer-Series in Synergetics Vol.17
Springer-Verlag, Berlin 1982

- [74] S. Großmann, Chaos - Unordnung und
Ordnung in nichtlinearen Systemen in:
Phys. Bl. 39, 139 (1983)

- [75] D.H. Mayer, Turbulenz: Durchbruch in einem
lange ungelösten Problem?, Teil I u. II,
Phys. Bl. 38, 55 (1982), Phys. Bl. 38, 87 (1982)

- [76] D. Campbell und H. Rose (Ed.), Order in Chaos,
Physica 7D (1983)

- [77] H.G. Schuster, Deterministic Chaos,
Physik-Verlag GmbH, Weinheim, im Druck

- [78] G. Poepstorff, Universalität in dissipativen
Systemen: Die Logistische Gleichung in:
Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie,
14. Ferienkurs, Hrg.: Kernforschungsanlage
Jülich GmbH 1983

- [79] B. Belousov, "Sb. Ref. Radiat. Med.", 145-147,
Medgiz, Moscow (1959)

- [80] R. Bonifacio und L.A. Lugiato,
Lett. Nuovo Cim. 21, 510 (1978)

- [81] S.L. Mc Call, Appl. Phys. Lett. 32, 284 (1978)

- [82] R. Bonifacio, M. Gronchi und L.A. Lugiato,
Opt. Commun. 30, 129 (1979)

- [83] V. Benza und L.A. Lugiato, Z. Physik B35, 383 (1979)
V. Benza und L.A. Lugiato, Z. Physik B47, 79 (1982)
L.A. Lugiato und V. Benza, L.M. Narducci und J.D. Farina,
Z. Physik B49, 351 (1983)

- [84] L.A. Lugiato und L.M. Narducci, D.K. Bandy
und C.A. Pennise, Opt. Commun. 43, 281 (1982)
- [85] L.M. Narducci, D.K. Bandy, C.A. Pennise
und L.A. Lugiato, Opt. Commun. 44, 207 (1983)
- [86] L.A. Lugiato, Opt. Commun. 33, 108 (1980)
- [87] J.P. Crutchfield und N.H. Packard,
Int. J. Theor. Phys. 21, 433 (1982)
- [88] J.C. Roux, R.H. Simoyi und H.L. Swinney,
Physica 8D, 257 (1983)
- [89] K. Tomita, Phys. Reports 86, 113 (1982)
- [90] R. Neumann, in Vorbereitung
- [91] G. Mayer-Kress und H. Haken,
J. Stat. Phys. 26, 149 (1981)
- [92] J.P. Crutchfield, J.D. Farmer und B.A. Huberman,
Phys. Reports 92, 45 (1982)
- [93] H.E. Schmidt, S.W. Koch und H. Haug,
Z. Physik B51, 85 (1983)
- [94] A. Nordsiek, Math. Comput. 16, 22 (1962)
- [95] F. James, Rep. Prog. Phys. 43, 1145 (1980)

- [96] R. Neumann, in Vorbereitung
- [97] K. Matsumoto und I. Tsuda,
J. Stat. Phys. 31, 87 (1983)
- [98] P.W. Smith und E.H. Turner,
Appl. Phys. Lett. 30, 280 (1977)
P.W. Smith, E.H. Turner und P.J. Maloney,
IEEE Quantum Electronics 14, 207 (1978)
- [99] J. Chrostowski und C. Delisle,
Opt. Commun. 41, 71 (1982)
- [100] H.M. Gibbs, F.A. Hopf, D.L. Kaplan und
R.L. Shoemaker, Phys. Rev. Lett. 46, 474 (1981)
F.A. Hopf, D.L. Kaplan, H.M. Gibbs und R.L. Shoemaker,
Phys. Rev. A25, 2172 (1982)
- [101] J.Y. Gao, J.M. Yuan und L.M. Narducci,
Opt. Commun. 44, 201 (1983)
- [102] J. Chrostowski, R. Vallee und C. Delisle,
wird veröffentlicht
- [103] J. Chrostowski, Phys. Rev. A26, 3023 (1982)

DANKSAGUNGEN

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. H. Haug. Durch sein reges Interesse an meiner Arbeit, sowie durch sehr viele wertvolle Ratschläge und Hinweise hat er entscheidenden Anteil am Gelingen dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr. H.G. Schuster danke ich für wichtige, die Behandlung des deterministischen Chaos betreffende, Anregungen.

Bei allen Angehörigen des Instituts, insbesondere bei Herrn Dr. S.W. Koch und Herrn Dipl. Phys. H.E. Schmidt, bedanke ich mich für die gute Zusammenarbeit.

Für das Anfertigen der Zeichnungen möchte ich mich bei Frau Boffo bedanken.

Diese Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen einer Sachbeihilfe zum Thema "Theorie der Photonenstatistik bei nichtlinearen optischen Prozessen" finanziell unterstützt.

Die numerischen Rechnungen wurden auf den Computeranlagen der Gesellschaft für Schwerionenforschung (GSI) in Darmstadt und der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt/Main durchgeführt.

LEBENS LAUF

Rainer Neumann, geb. am 28.5.1952

Frankfurt/Main

1959-1963 Besuch der Bonifatius-Schule (Grundschule) in Frankfurt/Main

1963-1971 Besuch der Liebig-Schule (Gymnasium) in Frankfurt/Main

1971 Abitur

1971-1972 Wehrdienst

1972 Aufnahme des Studiums der Physik an der
Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt/Main

1974 Diplom-Vorprüfung

1978 Abschluß der Diplomarbeit am Institut für
Theoretische Physik bei Herrn Prof. Dr. H. Haug.
Thema: Zur Theorie antikorrelierter Photonen.

1979 Diplom-Hauptprüfung

1979 Beginn der Promotion bei Herrn Prof. Dr. H. Haug am
Institut für Theoretische Physik in Frankfurt/Main

Meine akademischen Lehrer waren die Professoren:

Adasch, Burde, Dreizler, Gerhard, Haug, Hirst, Jelitto,
Kulze, Kummer, Martienssen, Mohler, Roesky, Schaarschmidt,
Schuster und Weidmann

